Module d'Optique Géométrique

Mme Zeineb BEN AHMED, Mr Habib BOUCHRIHA

Mme Samia KADDOUR

Université Virtuelle de Tunis

2006

Ce module porte sur l'optique géométrique qui est une matière de base dans la formation des physiciens et des ingénieurs. Le module s'adresse aux étudiants des premiers cycles scientifiques et aux élèves des classes préparatoires aux écoles d'ingénieurs. Il est également utile aux candidats des concours aux CAPES et à l'agrégation de sciences physiques.

Structuré en dix (10) chapitres, il présente, après une brève histoire de l'optique, les principes, les fondements et les lois de l'optique géométrique et aborde ensuite l'étude des systèmes plans et sphériques, l'association de systèmes centrés et l'étude de quelques instruments d'optique. Il présente, enfin, des notions d'optique matricielle qui permettent de résoudre plus rapidement certains problèmes d'optique.

Objectifs du cours

L'objectif de ce module est de présenter un cours aussi complet que possible de l'optique géométrique et de ses applications. L'étudiant sera en mesure :

- de connaître le développement de l'optique au cours des siècles depuis l'Antiquité à nos jours et d'acquérir ainsi une culture scientifique;

- d'assimiler les fondements de l'optique géométrique et d'avoir une idée précise sur la nature de la lumière et sur les milieux transparents;

- de connaître les lois générales et les principes fondamentaux qui régissent l'optique géométrique dans les milieux homogènes et inhomogènes;

- de comprendre la notion d'image d'un objet donnée par un système optique ainsi que les notions de stigmatisme rigoureux et approché;

- d'appliquer les notions précédentes à l'étude des systèmes optiques à faces planes comme le miroir plan, le dioptre plan et la lame à faces parallèles;

- de maîtriser la construction de la marche d'un rayon lumineux à travers un prisme et de comprendre le phénomène de dispersion de la lumière;

- de déterminer les éléments caractéristiques des miroirs et dioptres plans et des lentilles et de construire les images données par ces systèmes et par leur association;

- de connaître les principaux instruments d'optique et leur domaine d'utilisation dans l'observation des objets et la mesure de leur dimension, l'obtention et le reproduction des images, … ;

- de découvrir une nouvelle approche de l'optique géométrique : l'optique matricielle qui peut conduire à une résolution rapide de certains problèmes d'optique.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 5
SYSTÈMES OPTIQUES SIMPLES À FACES PLANES 119

CHAPITRE 6
LE PRISME 149

CHAPITRE 7
SYSTEMES OPTIQUES SIMPLES A FACES SPHÉRIQUES 177

CHAPITRE 8
LES LENTILLES 231

Avant propos

Bien que ses fondements et ses principes pilotes soient anciens, l'optique est parmi les différentes parties de la physique celle qui a le plus évolué eu égard à ses analogies multiples avec la mécanique, l'électromagnétisme et la physique quantique et au potentiel d'application qu'elle génère dans le vécu quotidien et la recherche scientifique. L'optoélectronique, l'optique non linéaire, la photonique, les télécommunications par fibres optiques, l'holographie, …, ne sont que des exemples de ce que l'optique a fourni comme outils aux autres disciplines et à l'avancement des sciences en général.

De la vie courante (éclairage, lunetterie, photographie, cinéma,…), à la médecine (ophtalmoscopie, fibroscopie, endoscopie, …) en passant par l'industrie (usinage laser, fours solaires, diodes électroluminescentes, …) et la communication (liaisons optiques, …) l'optique, loin d'être vieillotte, est au cœur des mutations que connaît la société moderne.

Curieusement, l'optique géométrique qui est à la base de toutes ces mutations continue, malgré son caractère profondément expérimental, à être considérée comme un sous-produit de la géométrie mathématique qui désintéresse les étudiants par son statut figé et formaliste.

L'objectif de cet ouvrage, qui résulte d'une expérience d'enseignement de l'optique pendant de nombreuses années dans les premiers cycles scientifiques, est de présenter un cours aussi attrayant que possible alliant l'histoire à la modernité et donnant à l'optique la place qui lui sied dans le cursus de physique, à savoir un cadre agréable de compréhension et d'interprétation des phénomènes lumineux. La lumière a, en effet, fasciné l'esprit humain par ses multiples aspects et son caractère mystérieux : c'est grâce à la lumière que nous recevons des étoiles que nous comprenons mieux la structure de l'univers et son expansion, c'est grâce à elle et à son interaction avec la matière qu'on peut manipuler les atomes et sonder leur univers microscopique.

L’ouvrage est structuré en dix chapitres dont chacun est suivi par une série d’exercices et problèmes qui permettent de compléter le cours et d’en assimiler le contenu.

Le premier chapitre est dédié à une brève histoire de l’optique allant de l’Antiquité aux développements récents en passant par l’école arabe, la Renaissance et la révolution quantique.

Le chapitre 2 est consacré à la présentation de la nature de la lumière et à la description des ondes lumineuses. On y énoncera également les principes de propagation rectiligne et le principe de retour inverse de la lumière et on définira les milieux transparents et les matériaux optiques.

Dans le chapitre 3, on présentera les lois de Snell-Descartes et le principe de Fermat en insistant sur leur mutuelle compatibilité et leur caractère universel. On abordera ensuite l’étude de la propagation dans les milieux inhomogènes qu’on agrémentera de quelques applications.

Le chapitre 4 est essentiel à l’étude des systèmes optiques, on y définit les caractéristiques générales de ces systèmes (axe optique, centre, éléments cardinaux, …) et la nature des images (réelle ou virtuelle) qu’on peut obtenir aussi bien dans le cas d’un stigmatisme rigoureux que d’un stigmatisme approché dans les conditions de l’optique para axiale ou conditions de Gauss.

Dans les chapitres 5 et 6 on abordera les systèmes plans qui sont les systèmes optiques les plus simples et on étudiera en détail quatre d’entre eux : le miroir, le dioptre, la lame à faces parallèles et le prisme.

Les chapitres 7 et 8 sont relatifs aux systèmes optiques à faces sphériques qui présentent également un grand intérêt dans l’instrumentation optique. On étudiera particulièrement le miroir et le dioptre sphériques en établissant les relations de conjugaison qui donnent la position de l’image par rapport à celle de l’objet à partir de leurs caractéristiques fondamentales qui sont les foyers, les distances focales, la vergence, …. On étudiera ensuite les lentilles qui sont les éléments les plus employés dans les instruments et les montages optiques et qui sont constituées par l’association de deux dioptres dont l’un au moins est sphérique.

L’étude de quelques instruments optiques fait l’objet du chapitre 9. Cette étude est importante et instructive car il n’est point de technique de nos jours qui n’utilise les moyens optiques pour la mesure, la reproduction, l’observation ou la transmission des données. On y présente successivement l’œil, ce système optique combien complexe et combien merveilleux, la loupe, le microscope, la lunette astronomique et le télescope.

Enfin, le chapitre 10 présente les notions d'optique matricielle qui est une approche moderne et économique pour atteindre rapidement la position de l'image et le grandissement ou le grossissement donnés par un système complexe. Dans cette approche, chaque élément du système est caractérisé par une matrice de transfert et le système global est défini par une matrice égale au produit des matrices de chacun de ses éléments. L'étude de cette matrice donne simplement les relations entre l'espace objet et l'espace image.

Nous tenons à remercier tout le personnel du Centre de Publication Universitaire ainsi que Dhouha Gamra et Fayçal Kouki pour leur aide précieuse dans la réalisation du manuscrit.

Enfin, nous remercions d'avance tous ceux, étudiants et enseignants, qui par leurs remarques et leurs critiques amélioreront cette première édition qui, loin d'être parfaite, est perfectible.

Les auteurs

Octobre 2004

CHAPITRE 1

UNE BREVE HISTOIRE DE L'OPTIQUE

L'histoire de la physique est entièrement liée à l'histoire de l'intelligence humaine. Depuis son apparition sur terre, l'homme, pour s'adapter à son environnement et pour survivre, a fait de la physique sans le savoir. Ses seuls outils de communication étaient alors ses sens qui lui ont permis de voir, de toucher, d'entendre, de sentir … et qui sont d'ailleurs à la base de la classification des diverses branches de la physique où l'optique est liée à la vue, la chaleur au toucher, l'acoustique à l'ouie, ….

1. L'optique pendant l'antiquité

Depuis l'antiquité, la lumière a toujours fasciné l'esprit humain par ses aspects multiples et son caractère mystérieux. Elle est apparue dans l'histoire 4 000 ans avant Jésus-Christ avec les Sumériens qui utilisaient la lumière et les astres pour prédire le quotidien et pour concentrer la lumière afin de créer du feu. Vers 2 500 avant J.C. les miroirs de métal polis étaient déjà connus et l'usage du verre commença à se répandre. Les peuples khmers, chinois et mayas se livraient même à des calculs et inventaient des instruments d'observation astronomiques des "lumières célestes".

En fait, ce n'est qu'à partir du Ve siècle avant J.C. en Grèce qu'un début de réflexion scientifique est apparu lorsque des penseurs commencèrent à se poser des questions sur l'origine des objets qui les entouraient, leur classement, leur constitution, leur production et leur manifestation. Ainsi, Empédocle (-490, -430) a imaginé que la nature était constituée de quatre éléments principaux : l'air, l'eau, le feu et le sable dont chacun présente deux des quatre caractéristiques fondamentales : le froid, l'humide, le chaud et le sec. Plus tard, Démocrite (-460, -370) a proposé une vision atomiste, où tout est constitué de petits éléments insécables appelés atomes. A cette époque déjà, la classification d'Empédocle a été réduite à deux types d'objets, la matière et la lumière, la matière étant faite de corpuscules parfaitement localisables alors que la lumière est sujette à de nombreuses tergiversations. D'autres manifestations telles que le son, étaient également appréhendées aussi bien dans la façon de les produire que dans l'analyse de leur nature.

Mais, curieusement, alors que le son fut d'abord considéré du point de vue de sa production, on envisagea la description "physique" de la lumière sous l'angle de sa propagation. Très tôt la lumière a été assimilée à un mouvement de fines particules qui sont soit émises par les objets lumineux soit émises par l'œil.

Pour les pythagoriciens (VIe siècle av. J.C.), chaque individu possède un feu intérieur et l'œil émet un "quid" qui part vers l'objet et lorsqu'il le touche, provoque la vision.

Pour les atomistes (Ve siècle av. J.C.), les objets émettent des "eidolas" qui sont des membranes ou écorces ayant le même aspect que les objets et dont les dimensions diminuent lorsqu'ils arrivent à l'œil. Elles sont des images fidèles et réduites des objets matériels et elles entrent en nous par l'œil.

Pour Platon (-428, -348), une situation intermédiaire entre les précédentes est envisagée, elle consiste en la rencontre de deux particules, l'une émise par l'œil, l'autre par l'objet observé. Il en résulte une substance unique et homogène qui transmet l'information jusqu'à "l'âme".

Dans tous les cas, la trajectoire de ces particules est postulée rectiligne et le milieu dans lequel se propage la lumière joue un rôle considérable. Pour Lucrèce (-98, -55), ce milieu est constitué d'éléments qui s'entrechoquent et se poussent les uns les autres et il en résulte que la propagation de la lumière dans le vide est impossible.

Les idées se développent ensuite avec le recours au fait expérimental et les progrès réalisés par Sénèque et Galien dans l'étude de l'œil ont permis à Ptolémée (90, 168) d'énoncer à Alexandrie en 140 après J.C. les premières lois de l'optique géométrique concernant la réflexion ainsi qu'une ébauche de théorie des lois de la réfraction et aussi la notion d'axe visuel autour duquel la vision se concentre.

2. L'optique chez les Arabes

Le premier millénaire n'apporta aucune avancée sensible et il a fallu attendre le XIe siècle où les Arabes, héritiers des savoirs de l'antiquité par la bibliothèque d'Alexandrie, approfondirent ces travaux en matière d'optique. Les progrès vinrent d'Égypte grâce aux travaux du grand savant arabe Ibn Al-Haytham dit Alhazen (965-1039). Ibn Al-Haytham est né à Bassora en Irak et c'est en Egypte, sous le règne du calife fatimide Al Hakim qu'il démarra sa carrière. Surnommé le second Ptolémée, Ibn Al-Haytham fut à la fois mathématicien, physicien, philosophe et médecin et fut, à ces titres, l'auteur d'une centaine d'ouvrages et de plusieurs découvertes. Il étudie l'œil et la réfraction et établit une véritable théorie corpusculaire de la lumière. Pour lui, la lumière est émise par l'objet lumineux indépendamment de l'observateur et sa propagation dépend du milieu qu'elle traverse.

Son explication du phénomène de la réfraction ainsi que les lois de la réfraction furent à la base des travaux, six siècles plus tard, de Kepler et de René Descartes. Ibn Al-Haytham est arrivé à la conclusion que la réfraction de la lumière est due à des rayons lumineux qui se propagent à des vitesses différentes dans des matériaux différents. Ibn Al-haytham affirma que la lumière était une « émission primaire » et envisagea « une émission secondaire » provenant de ce qu'il appela une « source accidentelle ». La lumière émanant d'une telle source est émise « en forme de sphère ». C'est la première fois que le principe des ondes secondaires fut avancé, principe qui sera énoncé d'une manière plus explicite, six siècles plus tard, par le hollandais Christian Huygens. Ibn Al-Haytham introduisit aussi le concept de « rayon de lumière » tout en lui donnant une représentation bien physique. Il découvrit le phénomène de la chambre noire comme il s'intéressa aux miroirs convexes et concaves ainsi qu'aux surfaces polies tout en étudiant avec rigueur la réflexion sur ces surfaces, les aberrations sphériques ou encore le phénomène de l'arc-en-ciel. On lui doit également notre façon de résoudre graphiquement les problèmes d'optique en traçant des lignes droites pour illustrer la trajectoire de la lumière.

L'ensemble de l'œuvre de Ibn Al-Haytham révéla la naissance et la puissance du physicien moderne. Son œuvre, portant à son apogée la physique arabe, fut une référence incontournable pour la physique de l'Occident au sortir des ténèbres du Moyen-Age.

Ibn Al-Haytham introduisit également la méthode empirique qui est à la base de tout travail de recherche scientifique où la seule vérité tangible est la preuve expérimentale. A ce titre, il était le précurseur de Roger Bacon (1214-1294).

Dans son ouvrage Kitab Al-Manazir, traduit au XIIe siècle en latin sous le titre de « Optical Thesurus AlHazeni Arabi », il écrit notamment « Le phénomène de la vision n'ayant pas été éclairci, nous avons décidé de nous préoccuper de la question, autant que cela nous est possible, de nous y adonner exclusivement et d'y réfléchir mûrement […] Nous reprenons toute l'étude, commençant par le commencement, par les principes et les postulats […] Au début de notre recherche, nous rassemblons d'une manière exhaustive les faits réels […] Nous élevons ensuite notre recherche […] critiquant les prémisses et prenant des précautions dans l'enregistrement des conclusions et conséquences […] Notre objectif est de faire usage d'un jugement juste […] Peut-être pourrons-nous finir, de cette façon, par atteindre la vérité qui nous apportera la joie du cœur […] Et malgré cela nous ne serons pas à l'abri des défauts inhérents à la nature humaine ».

Enfin, l'optique instrumentale fit aussi de grands progrès et on inventa dès le 11ème siècle, en Égypte, les premiers lorgnons pour presbytes qui rendirent aux vieillards la jeunesse de leur vue.

3. L'écart à l'optique géométrique

Il semble que la nature ondulatoire de la lumière a été affirmée pour la première fois par le franciscain anglais Robert Grosseteste (1170, 1253), qui est un adepte de la méthode expérimentale en science, et par Roger Bacon qui étudia beaucoup la réflexion sur les miroirs sphériques à partir de l'étude de la formation des images par les lentilles et envisagea plutôt le problème de façon ondulatoire en penchant vers l'onde sphérique dans la description de la propagation.

Galilée (1564-1642) décrit pour la première fois des méthodes de mesure de la vitesse de la lumière. Ses tentatives échouent mais ont le mérite de donner à penser qu'il ne croyait pas trop à l'existence d'une vitesse infinie. La nature de la lumière ne semble pas trop le préoccuper.

Descartes (1596-1650) fait connaître les lois de la réfraction établies par Snell (1591-1626). Mais ses théories de la lumière sont confuses et pleines de contradictions. Il semble que la notoriété de l'écrivain philosophe leur ait donné une importance excessive. Pour Descartes, en effet, la lumière résulte de frottements entre tourbillons qui font naître de la lumière qui se propage avec une vitesse infinie. Mais la réflexion est envisagée comme le rebond d'un projectile et la réfraction comme la traversée par ces projectiles d'une toile tendue qui les accélère si le deuxième milieu est plus réfringent. Le XVIIème siècle aura beaucoup de mal à se débarrasser des tourbillons de Descartes; ce sera l'objet d'un des premiers écrits de Newton.

Fermat (1601-1665) retrouve les lois de la réfraction à l'aide du principe de moindre temps. Mais les difficultés qu'ont éprouvées ses contemporains à lier son principe aux autres théories font que Fermat aura moins d'influence qu'en mathématiques où il fut une vraie notoriété.

Grimaldi (1618-1663) et Malebranche (1638-1715) tous deux disciples de Galilée et Descartes croyaient fermement en la nature ondulatoire de la lumière. Le premier a même essayé d'interpréter les franges de diffraction ainsi que la décomposition de la lumière blanche.

4. Huygens et Newton

Christian Huygens (1629-1695) s'affranchit des théories cartésiennes et proposa l’idée que l'univers est rempli de particules dont les mouvements oscillatoires se transmettent de proche en proche. L'ensemble des particules qui vibrent en même temps constitue une ondelette; l'enveloppe des ondelettes forme l'onde lumineuse. Cette onde est longitudinale. Une telle théorie est visiblement inspirée par les rides qui se forment à la surface de l'eau. Elle a permis à son auteur d'expliquer les phénomènes de réflexion, de réfraction, et même de double réfraction de la lumière par la calcite découverte par Bartholin (1625-1698). Huygens n'avait pas une idée très claire des phénomènes d'interférence et plus généralement des relations de phase. Cela rendit sa théorie parfois obscure. Mais l'intuition du savant hollandais est rarement prise en défaut. Il a une bonne idée du principe dit de Huygens-Fresnel qui ne sera démontré que beaucoup plus tard par Kirchhoff. Curieusement, Huygens envisagea également l'existence de particules et les rapports qu'il cherche entre celles-ci et les ondes ont des résonances étrangement brogliennes.

La théorie de Huygens est impressionnante par la variété des phénomènes interprétés mais la notoriété de Newton (1642-1727) allait tout balayer. Pourtant Newton ne parviendra jamais à établir une théorie de la lumière qui soit satisfaisante pour lui comme pour ses contemporains. Mais la renommée de l'auteur de la théorie de la gravitation et le caractère du personnage vont faire que les objections seront rapidement écartées. Les travaux de Newton en optique sont importants et les dates de publication de ses deux traités (1672 pour la Théorie des couleurs, 1709 pour l'Optique) montrent que leur auteur a toujours été préoccupé par le sujet.

Sur le plan expérimental, Newton réalisa le premier télescope et étudia la décomposition de la lumière par un prisme. Il étudia aussi la lumière émise par les fours, effet connu aujourd’hui sous le nom de « rayonnement du corps noir » et qui le préoccupera fortement. Il pensait aussi que la lumière est constituée de corpuscules qui se propagent plus vite dans un milieu transparent que dans le vide et l'hypothèse de la nature ondulatoire lui paraît fantaisiste. Pourtant les expériences qu'il réalisa (anneaux d'interférences) ou la façon dont il les envisagea (réflexions multiples sur des vitres) plaidaient plutôt en faveur de cette hypothèse. En outre, Newton est l'auteur d’une théorie ondulatoire du son mais, pour la lumière, il préféra compliquer sa théorie corpusculaire en envisageant des actions instantanées à distance entre surfaces réfléchissantes et essaya en vain d'interpréter des phénomènes de nature ondulatoire avec des corpuscules lumineux. Parmi ses contemporains seuls Hooke et Euler rejetèrent cette théorie.

Rappelons enfin que la première mesure de la vitesse de la lumière est réalisée en 1675 par Olaf Romer (1644-1710) qui utilisa l'observation des satellites de Jupiter découverts par Galilée. Une deuxième mesure a été faite en 1728 par James Bradley (1693-1762). Ces deux mesures donnèrent comme valeur respectivement 225000Km/s et 308300 Km/s.

5. Thomas Young et l'école française

La théorie de Newton va résister un siècle durant. Puis la théorie ondulatoire va revenir. D'abord les mathématiciens (Euler, Clairvaux, D'Alembert, Bernoulli, Hamilton, Lagrange et Fourier) vont fournir aux physiciens les outils qui manquaient à Huygens pour que sa théorie soit totalement convaincante. Ensuite, les expériences du type diffraction et interférences vont livrer leurs secrets.

Thomas Young (1733-1829) est un esprit universel, bien que médecin, il était capable d'écrire dans l'encyclopédie Britannica des articles sur la vision, l'arc-en-ciel, le mouvement des fluides et les marées, la capillarité, la pesanteur, l'architecture navale, la médecine, la rosée et les hiéroglyphes. Il découvre même que certains mots de la pierre de Rosette sont écrits de manière phonétique et prépare ainsi les travaux de Champollion. Young réalisa une série d'expériences dont celle qui porte son nom. Le fait que les deux rayons lumineux réfractés par un cristal de calcite ne donnent pas d'interférences lui fait supposer que la lumière est une vibration transversale. Fresnel aura plus tard et indépendamment la même idée.

Fresnel (1788-1827) est l'auteur d'une théorie complète de la lumière polarisée. Très jeune, il se plaît à dire avec irrespect que "Newton radote". Il a été un des premiers physiciens à se spécialiser réellement en ne s'intéressant qu'à un seul domaine et sa théorie du vecteur lumineux est impressionnante. Fresnel a des idées somme toute assez justes sur la cohérence mais il bute sur l'éther, milieu hypothétique considéré comme un support pour la propagation de la lumière.

Fresnel a également travaillé avec Malus (1775-1812), partisan, lui, d'une théorie corpusculaire de la lumière, chose surprenante si l’on songe aux expériences et aux lois qui portent son nom.

On peut citer Foucault (1819-1868), Fizeau (1819-1896), Cornu (1841-1902) et même Michelson (1852-1931) comme les disciples de Fresnel. En particulier Fizeau et Foucault effectuèrent des expériences de mesure de la vitesse de la lumière. Les résultats n’étaient guère meilleurs que ceux obtenus par Romer et Bradley mais l'intérêt de ces mesures a été de montrer

que la vitesse de lumière dépend du milieu où elle se propage et de vérifier qu'elle est plus faible que dans le vide.

L'optique ondulatoire s'est affirmée avec Fraunhofer (1787-1826) qui est un contemporain de Fresnel et qui a réalisé des expériences de diffraction rendues possibles par les progrès techniques réalisés dans la fabrication des lampes.

La spectroscopie vit le jour avec les physiciens allemands Bunsen (1811-1899) et Kirchhoff (1825-1887). Ce dernier démontra également le principe d'Huygens-Fresnel.

L'apogée de la physique classique est atteint avec James Maxwell en 1873, qui établit que la lumière est une onde électromagnétique transversale se déplaçant dans le vide à la vitesse constante de 3.10^8 m/s et qui résulte d'une vibration du champ électrique et du champ magnétique en chaque point de l'espace.

La théorie de Maxwell est confirmée par les expériences de Hertz relatives aux antennes en 1888. Toutefois, pour Maxwell l'oscillateur n'est pas une antenne mais un atome ou une molécule dans lesquels les électrons exécutent des oscillations de très haute fréquence qui produisent un rayonnement électromagnétique. La théorie électromagnétique constitue désormais la base de l'optique physique mais elle se heurta à des difficultés insurmontables lorsqu'on tenta de l'appliquer à l'émission de la lumière par des corps portés à haute température (corps noir).

6. La révolution quantique

A la fin du 19éme siècle les physiciens se sont trouvés confrontés à des phénomènes nouveaux pour lesquels les prévisions de la théorie classique sont en désaccord flagrant avec l'expérience et avec le simple bon sens. Il fallait donc jeter les bases d'une nouvelle théorie, susceptible de pallier les insuffisances de la conception classique. Les phénomènes qui furent sans doute historiquement à l'origine de la naissance de la nouvelle théorie sont le rayonnement du corps noir, l'effet photoélectrique et les spectres atomiques. Il faut cependant signaler que la physique classique n'est pas remise en question dans tous les domaines d'investigation. Elle continue à expliquer un grand nombre de phénomènes dans le domaine macroscopique, mais sa validité s'avère limitée en ce qui concerne une description détaillée dans le domaine microscopique.

Parmi ces phénomènes, c'est principalement le rayonnement du corps noir qui a jeté les bases de la révolution quantique : un corps noir est un

corps qui absorbe intégralement tout rayonnement frappant sa surface. Chauffé à haute température, le corps noir émet de la lumière à toutes les longueurs d'ondes: Si l'on porte en fonction de la longueur d'onde, la densité d'énergie radiative, on obtient une courbe régulière tendant vers zéro pour les grandes et pour les faibles longueurs d'ondes et présentant un maximum pour une longueur d'onde λ dépendant simplement de la température suivant la loi dite de déplacement de "Wien" découverte en 1896 et qui stipule que le produit de la température par λ est une constante : cette loi expérimentale est fabuleuse en ce sens qu'elle nous permet de trouver la température connaissant λ et vice-versa. Ainsi sans poser les pieds sur le Soleil, on peut savoir que la température à sa surface est de 6000°C.

Malheureusement, malgré de nombreuses tentatives, ces manifestations expérimentales n'ont pu être reproduites par la théorie classique. Tout au plus Rayleigh (1842-1919) et Jeans (1877-1946), combinant l'électromagnétisme et la physique statistique, attribuèrent l'émission lumineuse à un ensemble d'oscillateurs qui vibrent : chaque oscillateur ayant une énergie moyenne continue proportionnelle à la température. Le résultat trouvé ne reflète pas l'expérience et, s'il donne un accord pour les grandes longueurs d'ondes, il conduit par sa continuité à une énergie rayonnée infinie pour les faibles longueurs d'ondes, ce qui est inacceptable physiquement et conduit à la catastrophe ultraviolette. Les physiciens firent d'autres tentatives mais sans succès. Leur échec est dû essentiellement à leur attachement au concept de la continuité de l'énergie considéré alors comme fondamental et inattaquable. On érigeait pourtant en principe la discontinuité de l'espace car les objets sont séparés les uns des autres, tout se termine quelque part. Les molécules, les atomes,…ne s'interpénètrent pas, il y a des limites bien nettes entre eux, seul était continu le vide dans lequel ils flottent. Mais on ne disposait d'aucune notion similaire sur la divisibilité de l'énergie : une pierre ne tomberait jamais avec un mouvement saccadé, le Soleil n'éclairerait pas par flambées…

L'apport de Planck a été d'évaluer de façon différente l'énergie moyenne de chaque oscillateur qu'il postule discrète et valant un multiple entier d'une énergie ε. Pour bien reproduire le spectre expérimental, ε devra être une fonction monotone de la fréquence ν. Planck prit alors la fonction la plus simple qui est un monôme $h\nu$, h étant une constante. L'accord s'est révélé parfait et la densité d'énergie rayonnée calculée par ce modèle reproduit l'expérience et permit, moyennant quelques manipulations mathématiques simples, de retrouver la loi de Wien et de calculer la constante h qui sera appelée constante de Planck et qui vaut $6.62\ 10^{-34}$ J.s. Le 14 décembre 1900 Planck énonce alors sa loi dans toute sa gloire : « les échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement ne se font pas de façon continue mais par quantités discrètes et indivisibles d'énergie $h\nu$ appelés "quanta" », quanta

étant le pluriel latin de quantum (qui signifie quantité). C'est la naissance de la physique quantique et Planck reçut en 1918 le prix Nobel pour cette découverte.

Malgré le succès de cette découverte, Planck est resté sceptique car il était conscient de toute la hardiesse du défi qu'il a lancé à la physique classique et faisait des efforts pour tenter de l'étayer et attendait des faits nouveaux que sa découverte est susceptible d'expliquer.

En 1905, Einstein (1879-1955) montre que les lois de l'effet photoélectrique établies par Philip Lenard (1862-1947) ne peuvent s'interpréter que si on introduit de façon beaucoup plus radicale que ne l'avait fait Planck un corpuscule, le photon, auquel il associe une énergie cinétique et une quantité de mouvement. L'effet Compton, plus simple dans son principe, est une confirmation particulièrement convaincante des idées d'Einstein.

Les travaux d'Einstein remettent donc la nature corpusculaire de la lumière à la mode. Ils n'effacent pas pour autant toutes les expériences qui ne peuvent être correctement interprétées qu'avec une hypothèse ondulatoire (interférences et diffraction notamment). Le photon serait à la fois une onde et un corpuscule. Cette dualité onde-corpuscule découverte pour le photon a été magistralement démontrée en 1927 par De Broglie pour les particules de matière et vérifiée expérimentalement par Davisson et Germer qui montrèrent que, comme un faisceau de photons, un faisceau de particules (électrons, neutrons, …) peut manifester un comportement ondulatoire.

Cette dualité est à la base du développement de la mécanique quantique où particules et photons sont décrits par une fonction d'onde qui contient toutes les informations relatives au système qu'ils constituent. Cette fonction est l'essence de la vision probabiliste de la mécanique quantique, vision qui s'est affirmée par la formulation en 1927 des principes d'incertitude de Heisenberg qui stipulent qu'on ne peut mesurer simultanément la position et l'impulsion d'une particule. La notion de trajectoire perd ainsi son sens en mécanique quantique au profit de la notion d'état quantique ; état qui est perturbé par la mesure des grandeurs relatives au système et qui est aussi de nature probabiliste.

Cet indéterminisme propre à la mécanique quantique a laissé sceptiques beaucoup de ses fondateurs dont Einstein lui-même qui, refusant d'admettre, devant l'harmonie de la création et la cohérence de l'Univers, que « Dieu joue aux dés », jugeait que les probabilités de la mécanique quantique devaient pouvoir se déduire d'une théorie plus fondamentale et plus complète. Cette nouvelle théorie formulée entre 1925 et 1927 par les Allemands Max Bohr, Werner Heisenberg, Pascual Jordan, les Autrichiens Wolfgang Pauli et Erwin Schrödinger et par le Britannique Paul Dirac, a

conduit en 1927 à l'interprétation connue sous le nom d'interprétation de l'Ecole de Copenhague. Interprétation harmonieuse où l'on renonçait à l'idéal d'une description à la fois spatio-temporelle et causale des phénomènes au profit d'un indéterminisme régi par des postulats mais dont les conséquences ont multiplié les succès dans la quête des lois relatives aux systèmes microscopiques.

La physique quantique issue du monde microscopique et qui se confinait alors essentiellement à l'atome a conquis le noyau et ses constituants et est à l'origine de toutes les théories pertinentes actuelles de la physique.

Entre 1945 et 1950, R. Feymann, S.I. Tomonaga et J. Schwinger développent la théorie de l'électrodynamique quantique qui, même exposée simplement, permet une interprétation cohérente des phénomènes ondulatoires et corpusculaires.

7. De l'optique physique à la photonique

Depuis 1950, on pensait que l'optique était une science achevée, susceptible uniquement de progrès technologiques. Or, depuis cette date, on assiste à un développement continu et même à un renouveau faisant jouer à la lumière un rôle déterminant dans tous les secteurs d'activité : recherche scientifique, technologie de l'information et de la communication, sciences médicales, environnement, procédés industriels, ….

En 1960, le physicien Théodore Maiman, utilisant les travaux de Kastler sur le pompage optique, a réussi à dompter l'incohérente lumière naturelle et à créer le premier générateur de rayonnement optique cohérent ou laser (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation). La cohérence spatiale et temporelle et la puissance du laser ont permis de développer l'holographie, les méthodes interférométriques, la spectroscopie à haute résolution, l'optique intégrée et l'optique non linéaire.

L'apparition des fibres optiques en 1970 a permis à la lumière d'être le support pour la transmission des informations, grâce à la très grande fréquence des vibrations lumineuses, la quantité d'informations transmises est énorme et on décèle aujourd'hui plus de 250 millions de kilomètres de fibres optiques dans le monde, soit l'équivalent d'environ 300 allers-retours de la Terre à la Lune.

La révolution des technologies de l'information et de la communication, les progrès réalisés dans les technologies de l'infiniment petit (nanotechnologies) sont en train de paver la voie pour faire du XXIème siècle le siècle de la lumière et du triomphe de l'optique et de suppléer le photon à l'électron.
En effet, la microélectronique qui a envahi notre vie de tous les jours se livre à une course vers la "miniaturisation" des composants ainsi que vers

l'accélération du transfert de l'information pour satisfaire le développement et la croissance ultra rapide du nouvel ordre numérique. Cependant, la diminution des dimensions des composants augmente la résistance de leurs circuits électriques et par suite leur échauffement ; par ailleurs, la célérité de l'information qui est véhiculée par les électrons est limitée par la vitesse de ces derniers qui atteint au plus 10^6 m/s dans la matière. En revanche, la lumière a de grands avantages sur le courant électrique ; les photons traversent un milieu diélectrique plus rapidement que les électrons dans les milieux conducteurs et ceci sans freinage ni interaction entre eux. On peut ainsi réaliser une architecture neuronale, à l'image de celle du cerveau, qui permet de conserver l'intégrité des signaux véhiculés.

La découverte en 1991 des cristaux phoniques permettra vraisemblablement de répondre à ces exigences et d'envisager la fabrication de circuits intégrés tout optique et de concevoir des liens optiques qui feront leur entrée dans l'architecture des ordinateurs annonçant l'ère des ordinateurs optiques et quantiques dans lesquels la lumière remplacera le courant électrique et les qbits remplaceront les bits offrant aux lois de la mécanique quantique un vaste champ d'application. La domestication, la manipulation et le contrôle des photons bouleverseront ainsi la technologie électronique et annonceront l'ère de la photonique.

CHAPITRE 2

FONDEMENTS DE L'OPTIQUE GEOMETRIQUE

L'optique (du grec "optikos" signifiant relatif à la vue) a d'abord été, comme on l'a vu dans le chapitre 1, l'étude de la lumière visible, c'est-à-dire des phénomènes perçus par l'œil et de l'information transmise à celui-ci. Cette information portant sur la forme de l'objet observé, sa couleur, sa position, …. Mais le mot "optique" a pris aujourd'hui un sens beaucoup plus large. D'une part il s'applique à un large domaine de longueurs d'onde, allant des rayons cosmiques aux micro-ondes. D'autre part, il implique en plus de la lumière les ondes associées aux particules en mouvement rapide tels que les électrons qui peuvent être guidés ou réfractés suivant des lois comparables à celles qui régissent les ondes lumineuses.

La classification des domaines de l'optique est aujourd'hui arbitraire et comporte de nombreux recouvrements. On peut néanmoins dire qu'elle est structurée en deux blocs : l'optique géométrique et l'optique ondulatoire ou physique, la première s'appliquant lorsque les longueurs mises en jeu dans le problème sont très inférieures aux dimensions de l'appareil de mesure, la deuxième se manifestant lorsque les longueurs d'onde sont de l'ordre de grandeur de ces derniers.

Le développement de la théorie de la mesure et de divers champs d'investigations de la connaissance a introduit également d'autres classifications dont les plus importantes sont :

- l'optique énergétique qui tient compte de l'intensité de la lumière, de sa répartition et de son action sur les divers récepteurs ;
- l'optique quantique qui envisage l'aspect corpusculaire de la lumière dans ses échanges d'énergie avec la matière ;
- l'optique électronique qui étudie les manifestations ondulatoires de faisceaux d'électrons ;
- l'optique instrumentale fondée sur les calculs et les raisonnements de l'optique géométrique et de l'optique ondulatoire et qui tient compte des propriétés des matériaux et des divers effets physiques qui permettent la génération ou la mesure d'un signal optique ;
- l'optique non linéaire dont la finalité principale est la grande concentration de puissance dans un petit volume, réalisée en général à l'aide d'un laser. Dans ce cas, la matière répond à l'excitation optique non plus suivant la loi habituelle de proportionnalité qui se traduit par les phénomènes de réfraction mais suivant des lois plus complexes permettant la transformation de la radiation incidente en une autre de fréquence double ou triple par exemple.

Pour présenter les fondements de l'optique géométrique, on évoquera d'abord de façon détaillée la nature de la lumière et la notion d'onde lumineuse. On énoncera ensuite les principes pilotes de l'optique géométrique qui sont le principe de propagation rectiligne de la lumière et le

principe de retour inverse de la lumière. On définira enfin les milieux transparents à partir de leur indice de réfraction absolu et relatif et on introduira le concept de chemin optique.

1. Nature de la lumière

Les premières théories (sérieuses) relatives à la nature de la lumière furent énoncées au cours du XVIIème siècle. Deux théories apparemment contradictoires virent le jour, l'une développant l'aspect corpusculaire, l'autre s'appuyant sur le mécanisme ondulatoire. Elles soulevèrent une controverse qui dura jusqu'au début de notre siècle. En effet, chacune de ces théories s'appuyait sur un certain nombre d'expériences mais laissait inexpliqués d'autres phénomènes physiques ou même semblait être mise en défaut par ces phénomènes.

La **théorie corpusculaire** avancée par Newton considère la lumière comme un ensemble de corpuscules (dont il ne précisait pas la nature) lancés à grande vitesse par l'objet lumineux dans un milieu appelé " éther ", qui y produisent des perturbations et qui viennent frapper le fond de l'œil (théorie de l'émission). La diversité des couleurs est ainsi expliquée par des différences de grosseur des corpuscules. Descartes avait également expliqué les lois de l'optique par des images empruntées à une cinématique corpusculaire et décrit la lumière comme étant "une tendance au mouvement" qui, par l'intermédiaire d'un milieu, "se redouble par petites secousses ".

Cette théorie laisse inexpliquée les phénomènes d'interférences (pourtant observés par Newton), c'est-à-dire le fait que, dans certains cas, la superposition de " lumières " peut produire l'obscurité. Elle n'explique pas, également, les phénomènes de diffraction, c'est-à-dire la présence de lumière dans les zones d'ombre géométrique.

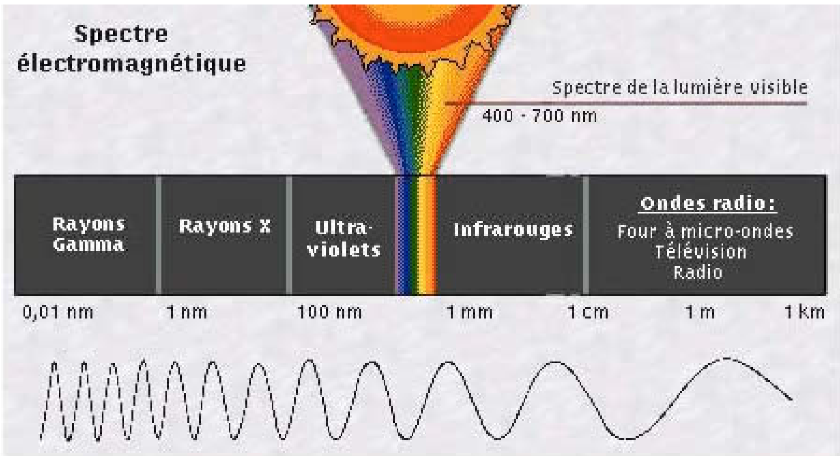
Il faudra attendre le début du vingtième siècle et les travaux d'Einstein (1905) et de Compton (1921) pour que cette théorie corpusculaire prenne sa forme définitive : la lumière est formée de quanta d'énergie appelés photons qui obéissent aux lois de conservation de la mécanique.

La **théorie ondulatoire** est proposée en 1665 par Hooke pour expliquer des phénomènes d'interférences. Cette théorie est reprise ensuite par Huygens qui considère que tout point d'une surface lumineuse émet une onde sphérique qui se propage à vitesse finie dans l'éther. Young puis Fresnel la complèteront en expliquant les interférences des ondes lumineuses et en associant la fréquence des ondes à leur couleur.

Cette théorie est incapable d'expliquer, entre autres, les échanges d'énergie entre rayonnement et matière tel que l'effet photoélectrique c'est-à-dire l'expulsion d'électrons dans une plaque métallique soumise à un rayonnement lumineux.

Il faudra attendre, là encore, 1864 et l'introduction des ondes électromagnétiques par Maxwell pour que cette théorie prenne sa forme définitive : la lumière est une onde électromagnétique**.** Cette onde est caractérisée par la propagation à la vitesse c d'un champ électrique et d'un champ magnétique couplés qui vibrent à une fréquence ν ; c est la célérité de la lumière dans le vide, elle vaut $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3.10^8$ m/s (où ε_0 et μ_0 sont des constantes universelles représentant respectivement la permittivité et la perméabilité du vide).

La théorie électromagnétique de Maxwell n'impose aucune limite à la fréquence des ondes électromagnétiques. Le spectre des radiations électromagnétiques s'étend des "ondes radio" aux "rayons γ", la lumière visible (0,4 µm < λ < 0,8 µm) n'occupant qu'une très faible partie de ce spectre.



Chacune de ces théories n'explique qu'une partie des phénomènes physiques relatifs à la lumière. En fait, la lumière est une entité propre qui a un double comportement : un comportement ondulatoire et un comportement corpusculaire, on parle alors de *dualité onde-corpuscules*.

En 1924, de Broglie montre, grâce à la mécanique ondulatoire, que le double aspect présenté par le phénomène lumineux n'est qu'un cas particulier d'une propriété générale de la matière : à toute particule de quantité de mouvement $\vec{p}$ est associée une onde de longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{\|\vec{p}\|}$ où $h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s est la constante universelle de Planck.

Cette théorie a été vérifiée pour les électrons par Davisson et Germer (1927) dans une expérience de diffraction. Toutefois, pour les particules

macroscopiques, cette longueur d'onde est trop petite pour être mise en évidence (pour une particule de masse m = 1 g se déplaçant à la vitesse $v = 10^3$ m/s on a $\lambda \approx 6{,}6.10^{-34}$ m !!)

On considère actuellement, la lumière comme constituée d'ondes électromagnétiques de fréquences ν voisines de 10^{15} Hz auxquelles sont associées des particules de masse nulle, appelées " photons ", transportant l'énergie $h\nu$ et de quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c}$.

L'optique doit donc être considérée comme la partie de la physique qui, au sens large actuel, étudie les manifestations et les propriétés de la lumière et, par extension, des ondes électromagnétiques. L'optique géométrique est la partie de l'optique qui se fonde sur la notion de rayons lumineux.

2. Notions sur les ondes

2.1. Généralités

L'onde est le déplacement à vitesse finie de la variation, dans l'espace et dans le temps, d'une grandeur physique. Cette grandeur peut être scalaire ou vectorielle et la propagation peut se faire le long d'une droite (déformation transversale le long d'une corde), sur une surface (rides à la surface de l'eau) ou dans l'espace (ondes sonores).

En acoustique, l'onde sonore est produite par un corps vibrant qui perturbe l'atmosphère qui l'entoure. Ces perturbations se traduisent par des variations de pression de cette atmosphère qui se transmettent d'un point à un autre. L'onde sonore est donc caractérisée par la variation d'une grandeur scalaire, la pression P(M,t). **Le son** est donc une onde de pression qui se transmet par les vibrations des milieux matériels qu'il traverse, il **ne se propage pas dans le vide**. Dans l'air, à 20°C et sous une atmosphère, la célérité du son est : v = 343 m/s.

Les ondes électromagnétiques, et par suite les ondes lumineuses, correspondent à la propagation du champ électromagnétique, constitué du champ électrique $\vec{E}(M,t)$ et du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$. Les intensités de ces champs varient dans l'espace et dans le temps. De plus, ces deux champs ne sont pas indépendants. **L'onde électromagnétique se propage dans le vide** avec la célérité $c = 3.10^8$ m/s.

2.2. Ondes transversales et ondes longitudinales

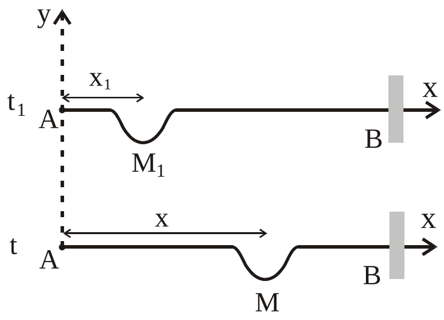
Considérons une corde tendue entre deux points A et B et supposons que l'on produise, en A à l'instant t_0, une déformation $y(A,t_0)$ perpendiculairement à la corde. Cette déformation va se déplacer et on la

retrouvera en M_1 à l'instant $t_1 = t_0 + \frac{x_1}{v}$ où v représente la vitesse de propagation de la déformation.

La déformation qui affectera un point M d'abscisse x à l'instant t, sera identique à celle qui a affecté A à l'instant $t_0 = t - \frac{x}{v}$:

$$y(M,t) = y(A, t - \frac{x}{v})$$

La déformation y(M,t) qui se propage suivant la direction de la corde (x'x) est une ***onde transversale***.

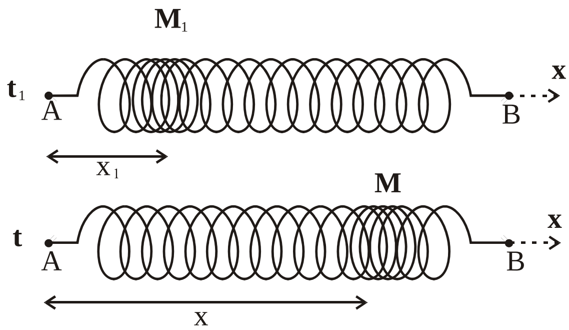


Considérons maintenant un ressort dont les extrémités sont attachées à deux points fixes A et B.

Pinçons en A, à l'instant t_0, quelques spires; la déformation va se déplacer à la vitesse v et on la retrouvera identique à elle-même au point M, à l'instant $t = t_0 + \frac{x}{v}$.

On a :

$$x(M,t) = x(A, t - \frac{x}{v})$$



La déformation x(M,t) qui a été effectuée suivant la direction du ressort et qui se propage suivant cette même direction est une ***onde longitudinale***.

Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ qui constituent le champ électromagnétique sont, dans le vide, perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à la direction de propagation.

Les ondes électromagnétiques sont donc ***des ondes transversales***.

2.3. Définitions

2.3.1. Ondes progressives unidimensionnelles

2.3.1.1 Équation d'onde

Considérons une onde se propageant suivant la direction $\overrightarrow{x'x}$.

Soit F(M,t) la grandeur physique dont on étudie la propagation. Nous avons vu que lorsque la propagation s'effectue suivant les valeurs croissantes

de x, la perturbation se trouve identique à elle-même à l'instant t, au point M, tel que :

$F(x,t) = f(t - \frac{x}{v})$ où v est la vitesse de propagation de la perturbation.

Si la perturbation se propageait dans la direction des valeurs décroissantes de x, on aurait trouvé :

$F(x,t) = g(t + \frac{x}{v})$

f et g sont des fonctions arbitraires respectivement de $(t - \frac{x}{v})$ et $(t + \frac{x}{v})$.

On démontre que la combinaison linéaire $F(x,t) = f(t - \frac{x}{v}) + g(t + \frac{x}{v})$ est la solution générale d'une *équation aux dérivées partielles* de la forme :

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0}$$

Cette équation est appelée "équation d'onde" ou "équation d'Alembert", sa solution la plus générale représente donc la somme de deux ondes progressives se propageant en sens inverse sur $\overrightarrow{x'x}$.

On remarquera que les fonctions f ou g , à un instant donné t, sont constantes dans tous les plans x = constante. Ces fonctions décrivent donc "***des ondes planes*** ".

2.3.1.2 Onde plane progressive sinusoïdale ou monochromatique

Un cas spécialement intéressant est celui où la fonction f (ou g) est une fonction sinusoïdale de x et de t, de pulsation ω.

Par un choix convenable de l'origine des temps on peut écrire :

$F(x,t) = A \cos \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$ où A est une constante.

On appelle " ***phase de l'onde*** " la quantité : $\Phi(x,t) = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$

La fonction F(x,t) présente une **double périodicité** :

• dans le temps : la **période temporelle T** représente la durée au bout de laquelle l'onde se retrouve identique à elle-même dans le même plan d'abscisse **x**

$F(\mathbf{x},t) = F(\mathbf{x},t + nT)$.

Cette période est égale à : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

La pulsation ω représente donc le nombre de périodes T dans l'intervalle de temps 2π secondes.

Le nombre de périodes par unité de temps, appelé *fréquence de l'onde*, est donné par

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

• dans l'espace : la **période spatiale ou longueur d'onde** λ représente la distance entre deux plans d'abscisses x et x + λ où l'onde est identique à elle même au même instant t:

$$F(x,\mathbf{t}) = F(x + \lambda,\mathbf{t}).$$

Elle est donnée par :
$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} v = vT$$

On définit la **pulsation spatiale ou nombre d'onde k** de l'onde par le nombre de longueurs d'onde λ sur une distance de 2π mètres :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

Le vecteur $\vec{k} = k\,\vec{i} = \frac{2\pi}{\lambda}\,\vec{i}$ porté par la direction de propagation et orienté dans le sens de la propagation est appelé " ***vecteur d'onde*** ".

On peut finalement écrire F(x,t) sous les formes équivalentes suivantes :

$$F(x,t) = A\cos\left(\omega(t - \frac{x}{v})\right) = A\cos\left(2\pi\,(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})\right)$$

$$F(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

Remarque : comme la direction de propagation est l'axe $\overrightarrow{Ox}$, la quantité kx n'est rien d'autre que le produit scalaire $\vec{k}\,.\,\vec{x}$ et on peut écrire :

$$F(x,t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\,.\,\vec{x})$$

Les ***surfaces équiphases*** (Φ (x,t) = constante) sont celles pour lesquelles, à un instant t donné, $\vec{k}\,.\,\vec{x}$ = constante. Pour une onde unidimensionnelle, de vecteur d'onde $\vec{k}$ donné, ce sont les plans x = constante, perpendiculaires à $\vec{k}$. On les appelle également **" *plans d'onde* "**.

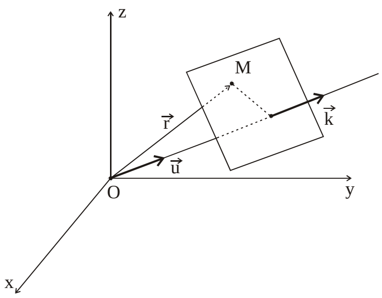
2.3.2. Ondes progressives de direction quelconque

Rapportons l'espace à un système d'axes orthonormés ($\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$). Soit $\vec{u}$ la direction de propagation de l'onde (on a donc $\vec{k} = k\,\vec{u}$) et M(x,y,z) un point repéré par son vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$.

Par analogie avec ce qui précède, l'onde progressive qui atteint M à l'instant t s'exprime simplement par :

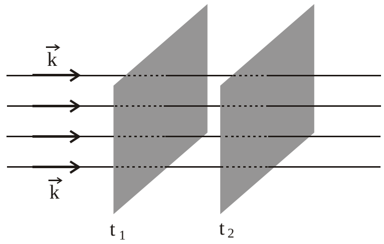
$$F(M,t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\,.\,\vec{r})$$

Les surfaces équiphases ou surfaces d'onde correspondant à une onde se propageant dans la direction $\vec{u}$, donc de vecteur d'onde $\vec{k}$ donné, à un instant donné t, sont les surfaces d'équation $\vec{k}.\vec{r} =$ constante, c'est-à-dire les plans perpendiculaires à $\vec{k}$.

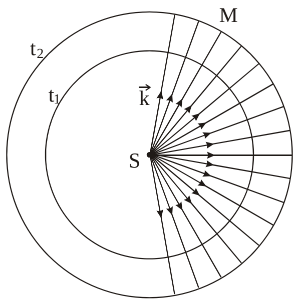


On dit qu'on a propagation en ***ondes planes***.

Nous retiendrons donc que les surfaces d'onde relatives à un faisceau de rayons parallèles (de vecteur d'onde $\vec{k}$ donné) sont des plans perpendiculaires à $\vec{k}$.



Si des ondes monochromatiques, de pulsation ω et de nombre d'onde k, sont issues d'un **point source S**, leurs vecteurs d'onde $\vec{k}$ auront toutes les directions de l'espace et les surfaces équiphases ou **surfaces d'onde seront des sphères centrées en S**. On dit que l'on a des **ondes sphériques**.



On démontre que dans ce cas l'amplitude A de l'onde est une fonction inversement proportionnelle à la distance r du point M considéré à la source S, soit :

$$F(M,t) = \frac{B}{r} \cos (\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$

3. Principe de propagation rectiligne de la lumière

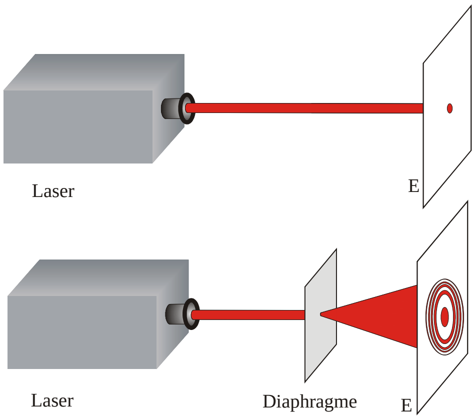
3.1. Le rayon lumineux

De nombreuses observations courantes (lumière du jour pénétrant dans une chambre obscure, faisceau laser traversant un nuage de fumée de tabac, lumière projetée par les phares d'une voiture sur une route poussiéreuse ou en temps pluvieux, …) suggèrent que **la lumière** issue d'une source **se propage en ligne droite dans un milieu homogène et transparent**.

Toutefois, les faisceaux lumineux observés ont des sections d'une certaine dimension et ne peuvent être confondus avec **un** rayon lumineux de section ponctuelle. On serait tenté, pour isoler un rayon lumineux, de diaphragmer ces faisceaux. Pour ce faire réalisons l'expérience suivante :

Un laser donne en général un faisceau quasi-cylindrique de section voisine de quelques mm^2. Sur l'écran d'observation E on observe donc une tache lumineuse circulaire de même section.

Interposons sur le trajet de ce faisceau un diaphragme à iris capable d'en réduire à volonté la section.



On constate que, au fur et à mesure que l'on rétrécit le diaphragme, la dimension de la tache sur l'écran diminue mais, à partir d'une certaine ouverture, on obtient sur l'écran un éclairement non uniforme constitué d'une tache centrale de dimension supérieure à celle de l'iris et d'anneaux d'intensité plus faible : c'est le phénomène de diffraction.

Ce phénomène est caractérisé par un étalement angulaire ε valant : $\varepsilon = \frac{\lambda}{a}$ où λ est la longueur d'onde du faisceau monochromatique considéré et “a” le diamètre du diaphragme.

3.2. Limite de validité de l'optique géométrique

Le principe de propagation rectiligne de la lumière n'est donc qu'une première approximation; sa validité est limitée par les phénomènes de diffraction qui ont pour effet l'impossibilité d'isoler physiquement un rayon lumineux en limitant les faisceaux par un diaphragme de petite ouverture.

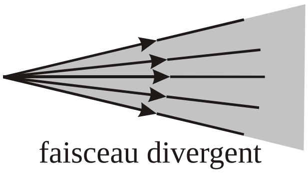
Pour observer la propagation rectiligne, il faudrait utiliser des instruments dont l'ouverture est grande devant la longueur d'onde λ de la lumière utilisée.

3.3. Indépendance des rayons lumineux

On admet que **les faisceaux lumineux sont composés de rayons lumineux indépendants les uns des autres**. Il en résulte que des rayons issus de différents points d'une source lumineuses ne se perturbent pas les uns les autres et que l'on peut étudier la marche d'un rayon lumineux indépendamment de la marche des autres rayons.

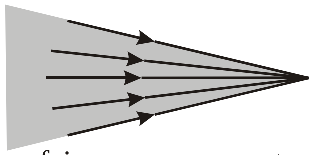
Un faisceau lumineux étant constitué de rayons ayant des directions données, on appellera, en indiquant par une flèche le sens de propagation de la lumière :

• ***faisceau*** "***divergent*** " un faisceau lumineux dont tous les rayons sont issus d'un même point S,



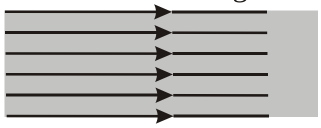
faisceau divergent

• ***faisceau*** "***convergent*** " un faisceau lumineux dont tous les rayons aboutissent à un même point,



faisceau convergent

• ***faisceau*** "***parallèle*** " ou "***cylindrique*** " un faisceau lumineux dont tous les rayons sont parallèles.



faisceau parallèle

4. Principe du retour inverse de la lumière

Considérons un rayon lumineux issu d'un point A, traversant plusieurs milieux et aboutissant à un point B, sans subir de réflexion.

Si on inverse le sens de la lumière, en considérant un rayon lumineux issu du point B et aboutissant au point A, on remarque que la lumière suivra le même trajet entre ces deux points.

On dit que le trajet suivi par la lumière est indépendant du sens de propagation.

5. Indices de réfraction

5.1. Les milieux

La lumière peut se propager dans le vide et les milieux autres que le vide.
Un milieu est dit :

• ***homogène*** lorsque sa composition est la même en tous ses points; il est dit ***inhomogène*** dans le cas contraire,

• ***isotrope*** lorsque ses propriétés sont les mêmes dans toutes les directions; dans le cas contraire, il est ***anisotrope*** ,

• ***transparent*** s'il laisse passer la lumière sans atténuation (l'eau, le verre, …); il est ***absorbant*** s'il ne laisse passer qu'une partie de la lumière (verres fumés, …). En réalité, tous les milieux matériels sont plus ou moins absorbants. A la limite, il est ***opaque*** s'il ne laisse pas passer la lumière (pratiquement, tous les métaux le sont).

La permittivité ε d'un milieu est différente de celle ε_0 du vide alors que, dans le cas d'un milieu non magnétique, sa perméabilité μ est très peu différente de celle μ_0 du vide. Dans un milieu transparent, homogène et isotrope, ε est une fonction de la fréquence ν. La vitesse v de propagation de la lumière dans le milieu s'écrit alors : $v(\nu) = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon(\nu)\mu_0}}$.

5.2. Indices des milieux

Le rapport entre la vitesse de la lumière dans le vide à celle dans le milieu considéré est un nombre sans dimension, noté n et appelé "***indice du milieu***"

$$\boxed{n(\nu) = \frac{c}{v(\nu)}}$$

La dépendance en fréquence de l'indice caractérise "*le pouvoir dispersif* " du milieu :

$$n = n(\nu) \qquad \text{ou} \qquad n = n(\omega) \qquad \text{ou} \qquad n = n(\lambda)$$

En général, n est une fonction décroissante de la longueur d'onde.

Soit λ_0 et λ les longueurs d'onde d'une même radiation, de pulsation ω, dans le vide et dans un milieu d'indice n; la période de la vibration est fixe, puisque donnée par $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, donc :

$$\lambda_0 = cT \qquad \text{et} \qquad \lambda = vT \qquad \text{d'où} \qquad n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

Pour une même radiation, l'indice n d'un milieu dépend également de la température; sa variation est donnée, avec une bonne approximation, par la *formule de Gladstone* :

$$\frac{n-1}{\rho} = \text{constante}$$

où ρ est la masse volumique du milieu à la température θ considérée : $\rho = \frac{\rho_0}{1+k\theta}$, k étant le coefficient de dilatation cubique moyen entre 0 et θ °C.

Soit : $(n - 1)(1 + k\theta) = \text{constante}$

L'indice n est donc une fonction décroissante de la température.

De par leur définition, **les indices des milieux transparents usuels**, pour les fréquences optiques considérées, **sont supérieurs à 1**; mais certains milieux (plasmas, par exemple) peuvent avoir un indice inférieur à 1 dans certains domaines de fréquences.

Les milieux que nous considérerons dans ce cours seront transparents, homogènes, isotropes et d'indice supérieur ou égal à 1. Nous indiquerons, toutefois, ce qui se passerait s'ils ne l'étaient pas.

5.3. Dioptre

On désigne par ce terme toute surface de séparation entre deux milieux homogènes et transparents d'indices différents.

Cette surface peut être plane (le dioptre est alors dit plan), sphérique (dioptre sphérique) ou de forme quelconque.

Elle peut également être rendue soit totalement soit partiellement réfléchissante par un dépôt d'une fine couche métallique ou par un traitement adéquat. On obtient alors un miroir ou une lame partiellement réfléchissante.

6. Chemin optique

6.1. Cas général - Définition

Considérons un milieu transparent, isotrope mais pas nécessairement homogène, l'indice n du milieu pouvant varier d'un point à un autre pour une radiation monochromatique donnée. Soit (C) une courbe continue quelconque joignant deux points A et B, et ds un élément de longueur de cette courbe.

On appelle " ***chemin optique*** **[AB]** ", entre les points A et B le long de la courbe (C), l'intégrale curviligne

$$L = [AB] = \int_C n\,ds$$

Remarques :

a/- Comme $n = \frac{c}{v}$ et ds = vdt , cette expression s'écrit également :

$$L = [AB] = \int_A^B c\,dt = c(t_B - t_A) = c\,\Delta t$$

Le chemin optique représente donc la distance parcourue par la lumière si elle se propageait dans le vide pendant la même durée Δt de parcours dans le milieu considéré. Il est alors égal, à une constante multiplicative c près, au temps mis par la lumière pour aller de A à B.

b/- En introduisant la pulsation ω et le vecteur d'onde $\vec{k}$ de la radiation considérée, l'indice de réfraction s'écrit :

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\omega}\,\frac{\omega}{v} = \frac{c}{\omega}\|\vec{k}\|$$

Comme le vecteur d'onde $\vec{k}$ est colinéaire au vecteur déplacement élémentaire $d\vec{s}$, l'intégrale précédente peut d'écrire :

$$L = [AB] = \int_C n\,ds = \int_C \frac{c}{\omega}\vec{k}.d\vec{s} = \frac{c}{\omega}\int_C \vec{k}.d\vec{s}$$

Le chemin optique apparaît donc comme une grandeur algébrique, positive si le parcours de A vers B s'effectue dans le sens de la lumière, négative dans le cas contraire.

6.2. Cas d'un milieu homogène

Si le milieu est homogène, son indice de réfraction est constant d'un point à un autre et la lumière se propage en ligne droite; le chemin optique s'écrira:

$$L = [AB] = \int_A^B n\,ds = n\int_A^B ds = n\,\overline{AB} = n\,\ell$$

où ℓ est la mesure algébrique du segment AB.

Exemple : si la lumière parcourt une distance de 30 cm dans l'eau d'indice $n = \frac{4}{3}$, le chemin optique correspondant est $L = \frac{4}{3} \cdot 30 = 40$ cm. La lumière parcourrait donc dans le vide pendant le même temps une longueur de 40 cm.

En introduisant le vecteur unitaire $\vec{u}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ orienté dans le sens de la lumière, le chemin optique peut prendre la forme d'un produit scalaire :

$$L = [AB] = n\vec{u}.\overrightarrow{AB}$$

6.3. Cas d'une succession de milieux homogènes :

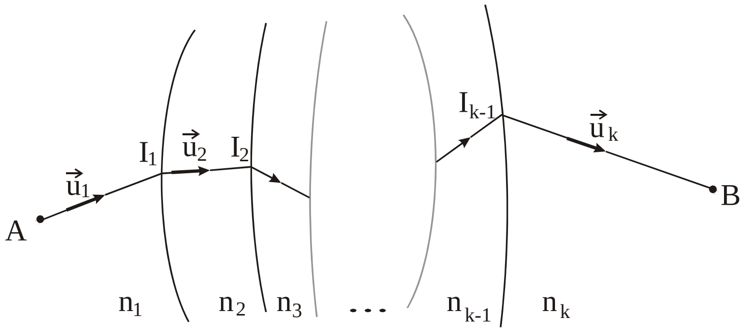
Dans le cas où l'on a une suite de milieux homogènes d'indices n_1, n_2, …, n_k, séparés par des dioptres, le trajet du rayon lumineux est formé d'une suite de segments de droites limités aux points de rencontre

I_1, I_2, …, I_{k-1} de ce rayon avec les dioptres. Le chemin optique entre deux points A et B appartenant respectivement au premier et au dernier milieu est:

$$L = [AB] = n_1\, AI_1 + n_2\, I_1I_2 + \ldots + n_k\, I_{k-1}B$$
$$= n_1\ell_1 + n_2\ell_2 + \ldots + n_k\ell_k$$
$$L = [AB] = \sum_i n_i \ell_i$$

soit encore :

$$L = [AB] = n_1\, \vec{u}_1 . \overrightarrow{AI_1} + \ldots + n_k\, \vec{u}_k\, \overrightarrow{I_{k-1}B}$$
$$L = [AB] = \sum_i n_i \vec{u}_i . \vec{\ell}_i$$



Remarque :

Si au cours de son trajet dans les milieux successifs considérés le rayon rencontre une surface réfléchissante, le chemin optique s'écrira de façon analogue en tenant compte de l'invariance de l'indice du milieu où s'effectue la réflexion.

7. Les matériaux optiques

L'optique utilise divers matériaux dont les propriétés physiques doivent répondre aux exigences que requiert leur utilisation dans les divers systèmes et montages.

On peut disposer de verres de composition diverses offrant une large gamme de réfringences et de dispersions avec une transparence suffisante pour les radiations utilisées.

Ces verres doivent être soigneusement homogénéisés pour avoir des indices de réfraction uniformes et leur état de surface doit résister à l'abrasion et aux altérations chimiques. On les a classé suivant des nomenclatures tel que le **crown**, qui est un silicate de calcium et de sodium ou de potassium, le **flint**, qui est un silicate de potassium et de plomb. Tous deux sont éventuellement additionnés d'anhydride borique ou phosphorique, de fluorures, de barytes, …. L'introduction de compositions nouvelles

(verres d'Iéna vers 1880, verres Kodak vers 1947, …) a entraîné des progrès intéressants et des performances potentielles.

Le quartz cristallin ou fondu (silice amorphe) est précieux de par sa faible dilatation et surtout en raison de sa transparence pour certaines radiations ultraviolettes ou infrarouges.

Les verres organiques sont des matériaux plastiques transparents, légers, résistants aux chocs mais généralement moins bien résistants à l'abrasion ; la possibilité de les reproduire par moulage est avantageuse et leur usage est développé en lunetterie.

On doit encore classer parmi les matériaux optiques certains liquides dispersifs (cinnamate d'éthyle, sulfure de carbone) qu'on enferme dans des prismes creux pour les besoins de la spectroscopie.

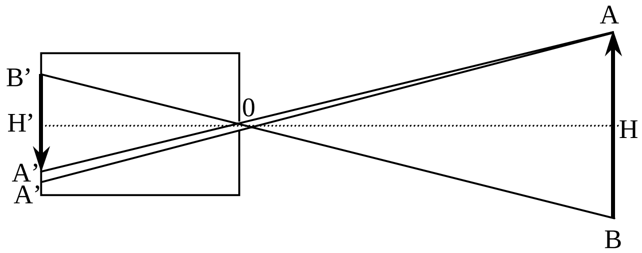
Enfin, on utilise aussi certains matériaux tels que l'aluminium et l'or en couches de très faible épaisseur sur un support de verre ou de silice à la forme voulue pour réaliser des miroirs ou des réseaux de diffraction.

Exercices et problèmes

EP.2.1 : Chambre noire

Elle est constituée par une caisse à parois opaques dans laquelle on a percé un petit trou sur l'une des faces verticales, la partie opposée étant constituée par un verre dépoli.

Un objet AB, représenté schématiquement par une flèche, est placé à une distance quelconque de la chambre. Chacun de ses points envoie des rayons dans toutes les directions, mais seuls peuvent entrer ceux qui rencontrent le trou en O : les rayons issus de A, par exemple, viennent dessiner sur le verre dépoli une trace lumineuse A' d'autant plus petite que le trou a des dimensions plus réduites. L'ensemble de ces taches forme une flèche renversée qu'on appelle "image".



1. La chambre noire ayant une profondeur de 40 cm, on désire réaliser une image d'un arbre de 10 mètres de hauteur situé à 20 mètres du trou.

Calculer la longueur de l'image de l'arbre sur le verre dépoli vertical.

2. Le trou étant un cercle de ½ mm de diamètre, quel est le diamètre de la tache lumineuse considérée comme l'image d'un point de l'arbre.

Solution

1. La similitude des triangles OAB et OA'B' permet d'écrire :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OH'}{OH} = \frac{40}{2\,000} = \frac{1}{50}$$

La longueur de l'image est donc le 1/50 de l'objet, soit :

A'B' = 0,2 m = 20 cm

2. La tache lumineuse correspondant à A est un cercle de diamètre $A'A'_1$; le diamètre du trou étant 0,5 mm, on a :

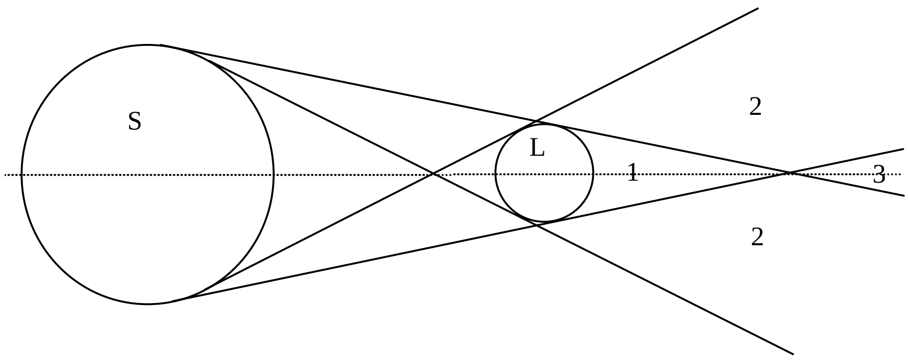
$$A'A'_1 = 0{,}5\ \frac{AA'}{AO} = 0{,}5\ \frac{HH'}{HO} = 0{,}5\left(1+\frac{OH'}{OH}\right) = 0{,}5\left(1+\frac{1}{50}\right)$$

Le diamètre $A'A'_1$ est don égal à ½ mm à 1/50 près

La netteté de A'B' augmente quand le diamètre du trou diminue, mais son éclairement devient de plus en plus faible. On verra plus loin que si l'on remplace le trou par une lentille convergente, on peut avoir une image nette et assez éclairée.

EP.2.2 : Eclipses de Soleil

Elles se produisent quand la Terre passe dans l'ombre de la Lune. S et L représentent le Soleil et la Lune ; on a dessiné sur la figure les cônes d'ombre et de pénombre.



Pour les points de la Terre situés dans la région 1, il y a éclipse totale, aucun point du Soleil n'étant visible ;

Dans la région 2, on observe une éclipse partielle, une partie seulement du disque solaire étant visible : on voit un croissant plus ou moins échancré ;

Enfin, pour les points de la région 3, il y a éclipse annulaire : la partie visible du Soleil a la forme d'un anneau.

En utilisant les données numériques suivantes

diamètre de la Terre : $d_T = 1{,}28.10^4$ km

diamètre de la Lune : $d_L = 3{,}5.10^3$ km

rapport du diamètre apparent du Soleil à celui de la Lune vus de la Terre : $\alpha = 0{,}9$

distance Terre-Soleil $R = 1{,}5.10^8$ km

distance Terre-Lune $r = 3{,}8.10^5$ km

évaluer :

1. Au niveau de la surface de la Terre

1.a. le diamètre de la zone d'ombre

1.b. le diamètre de la zone de pénombre.

2. La durée maximale d'une éclipse totale.

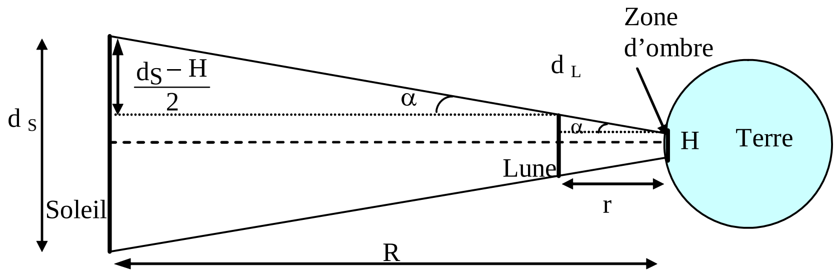
Solution

1.a. Diamètre de la zone d'ombre :

Le diamètre apparent du Soleil $\frac{d_S}{R}$ est l'angle sous lequel le Soleil est vu à partir de la Terre .

Le diamètre apparent de la Lune $\frac{d_L}{r}$ est l'angle sous lequel la Lune est vue à partir de la Terre.

Le rapport des diamètres apparents est donné par $\alpha = \frac{r}{R}\frac{d_S}{d_L} = 0{,}9$.



On a d'après la figure :

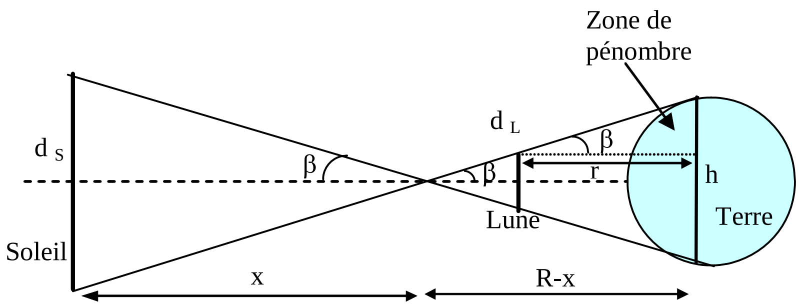
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{d_S - H}{2(R-r)} = \frac{d_L - H}{2r} \quad \text{comme } r \ll R \text{ il vient :}$$

$$\frac{d_S - H}{R} = \frac{d_L - H}{r} \quad \text{soit} \quad H\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{d_L}{r} - \frac{d_S}{R}$$

$$\text{comme } \frac{d_S}{R} = \alpha\frac{d_L}{r} \quad \text{on obtient} \quad H = \frac{d_L}{1-\frac{r}{R}}(1-\alpha)$$

soit : $H \cong d_L(1-\alpha)$ et on trouve $H \cong 350$ km.

1.b.



Notons que pour les besoins de la figure, le rapport des vraies dimensions n'est pas respecté .

En effectuant le calcul de la tangente de l'angle β, on a $\frac{h - d_L}{r} = \frac{d_S}{x} = \frac{h}{R-x}$.

On tire des relations précédentes : $x = \frac{R\ d_S}{h + d_S}$ et par suite : $\frac{R}{h + d_S} = \frac{r}{h - d_L}$.

Soit : h = $\dfrac{d_L}{1-\dfrac{r}{R}}\left(1+\dfrac{r}{R}\dfrac{d_S}{d_L}\right)=\dfrac{d_L}{1-\dfrac{r}{R}}(1+\alpha)\cong d_L(1+\alpha)\ \cong$ 7300 km.

2. La durée de l'éclipse est donnée par $\tau=\dfrac{d_S}{v}$ où v est la vitesse d'un point sur la surface de la Terre.

v = $\dfrac{\pi\ d_T}{86400}$ = 0,47 km /s (où d_T est la diamètre terrestre).

D'où : τ = 12 mn.

EP.2.3 : Longueurs d'ondes associées à des particules

Calculer la longueur d'onde de De Broglie associée à :
Une balle de fusil de masse 1 g et de vitesse 500 m/s
Un grain de poussière de masse 10^{-15} kg et de vitesse 1 mm/s
Un électron accéléré sous une différence de potentiel U = 100 V
Un électron dans l'atome d'hélium ayant une énergie cinétique de 24,6 eV correspondant à l'énergie d'ionisation de l'hélium
Une particule α (noyau d'hélium) ayant une énergie cinétique de 7,7 MeV.

Commenter dans chaque cas le résultat obtenu.

Solution

La longueur d'onde de De Broglie est définie par : $\lambda = \dfrac{h}{p}$

1. Longueur d'onde associée à la balle de fusil :

$$p = mv = 10^{-3} \times 500 = 0,5 \text{ kg.m.s}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{6,64.10^{-34}}{0,5} = 1,33.10^{-33} \text{ m}$$

λ est trop petite pour être mise en évidence expérimentalement

2. Longueur d'onde associée à un grain de poussière :

$$p = mv = 10^{-15} \times 10^{-3} = 10^{-18} \text{ kg.m.s}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{6,64.10^{-34}}{10^{-18}} = 6,64.10^{-16} \text{ m}$$

λ est encore trop petite pour être mesurée

3. Longueur d'onde associée à un électron accéléré

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Comme $E_C = \dfrac{p^2}{2m}$, on a $p = \sqrt{2mE_c}$ et $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2mE_c}} = \dfrac{h}{\sqrt{2m\,eU}}$

soit : $\lambda(\text{Å}) = \dfrac{12,3}{\sqrt{U(V)}}$

pour U = 100 V, on a : $\lambda = 1,23$ Å
Cette longueur d'onde se situe dans le domaine des rayons X

4. Longueur d'onde associée à un électron de l'atome d'hélium :
La formule précédente reste valable avec $E_c = 24,6$ eV

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = \frac{12,3}{\sqrt{24,6}} = 2,5 \text{ Å}$$

Cette longueur d'onde se situe également dans le domaine des rayons X

5. Longueur d'onde associée à une particule α :
On a : $E_c = 7,7$ MeV = =$12,32.10^{-13}$ J et $m_\alpha = 6,67.10^{-27}$ Kg

Soit : $p = \sqrt{2m_\alpha E_c} = 1,28.10^{-19}$ Kg.m.s^{-1}

d'où $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2mE_c}} = 5,16.10^{-15}$ m

EP.2.4 : Energie et quantité de mouvement transportées par la lumière

Un faisceau lumineux de longueur d'onde $\lambda = 0,5$ µm arrive perpendiculairement sur une surface parfaitement absorbante S = 1 cm^2.

1. L'énergie reçue par unité de temps par la surface étant de W = 10 watts, déterminer :

le nombre N de photons arrivant sur la surface par unité de temps,

le nombre n de photons du faisceau par unité de volume

la quantité de mouvement p d'un photon

2. On admet que cette quantité de mouvement est transmise à la surface (conservation de la quantité de mouvement) et que la force de radiation F exercée par le faisceau sur la surface est égale à la quantité de mouvement reçue par la surface par unité de temps.

Calculer la force de radiation F et la pression de radiation P.

Solution

1.1. Chaque photon apporte à la surface son énergie $E = h\nu$; les N photons arrivant sur la surface par unité de temps apportent donc l'énergie W = NE. Utilisant la relation entre longueur d'onde λ dans le vide et fréquence ν d'une onde lumineuse $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$, on obtient :

$$N = \frac{W}{E} = \frac{W}{h\nu} = \frac{W}{hc}\lambda$$

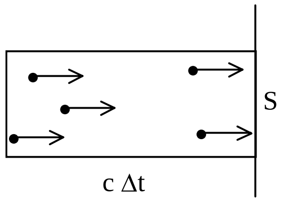
Soit :

$$N = \frac{10 \times 0,5 \cdot 10^{-6}}{6,6.10^{-34} \times 3.10^{8}} = 2,5.10^{19}$$

1.2. Tous les photons arrivant dans l'intervalle de temps [t, t + Δt] sur la surface S (photons au nombre de N(Δt)) sont ceux qui à l'instant t se trouvaient dans un cylindre de base S et de hauteur c (Δt) (distance parcourue par un photon dans l'intervalle Δt). Le volume de ce cylindre est égal à c (Δt) S ; il contient un nombre de photons égal à n c (Δt) S ; d'où

$$N(\Delta t) = n\, c\, (\Delta t)\, S$$

$$n = \frac{N}{cS} = \frac{2,5.10^{19}}{3.10^{8} \times 10^{-4}} = 8.10^{14}\ \text{m}^{-3}$$



1.3. L'utilisation de la relation de De Broglie conduit à :

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,6.10^{-34}}{0,5.10^{-6}} = 1,3.10^{-37}\ \text{kg.m.s}^{-1}$$

2. La quantité de mouvement des N (Δt) photons arrivant dans l'intervalle de temps Δt est N (Δt) $\vec{p}$; si cette quantité de mouvement est transmise à la surface, la surface acquiert dans l'intervalle de temps Δt la quantité de mouvement :

$$\Delta\vec{p} = N(\Delta t)\,\vec{p}$$

Le rapport $\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ représente la force exercée (par les photons) sur la surface (si la surface est maintenue fixe par un dispositif expérimental, ce dispositif doit exercer sur elle la force - $\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$). En module, cette force est :

$$F = \frac{\left\|\Delta\vec{p}\right\|}{\Delta t} = \frac{N\,\Delta t\, p}{\Delta t} = N\,p$$

On peut la calculer à partir des valeurs de N et p déjà trouvées, mais on peut aussi remarquer que :

$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = cp$ (relation entre l'énergie et la quantité de mouvement d'une particule de masse nulle)

$$F = N\,p = \frac{NE}{c} = \frac{W}{c} = \frac{10}{3.10^{8}} = 3,3.10^{-8}\ \text{N.}$$

La pression est, par définition, la force exercée par unité de surface :

$$P = \frac{F}{S} = \frac{3,3.10^{-8}}{10^{-4}} = 3,3.10^{-4}\ \text{Pa.}$$

Cette pression est très faible : environ 10^{-9} atmosphère.

EP.2.5 : Onde transversale dans une corde

Soit une corde infiniment fine, homogène, de masse linéique μ constante. Cette corde est sans raideur, c'est-à-dire que, non tendue, elle peut être déformée par une action faible. On la suppose dans la suite tendue, par un dispositif adéquat, avec une tension $\vec{T}$.

Au repos, la corde se confond avec l'axe des x qui correspond donc à sa position d'équilibre. On étudie *les petits mouvements transversaux* de la corde dans le plan xOy, ce qui signifie qu'un petit élément dl de corde situé au point M_0 d'abscisse x lorsque la corde est au repos se trouve au point M de même abscisse x et d'ordonnée y(t,x) lorsqu'elle est en mouvement.

La tangente à la corde au point M fait avec l'axe des x un angle α(t,x) supposé petit.

On néglige l'action de la pesanteur sur la corde ainsi que toute cause d'amortissement des mouvements.

1. Montrer que l'équation du mouvement d'un petit élément de la corde est donnée par :

$$F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Que représente cette équation ?

2. On suppose que le mouvement du point M est sinusoïdal de pulsation ω et est décrit par :

$$y(x, t) = A(x) \exp(i\omega t)$$

Donner la solution générale de l'équation différentielle à laquelle satisfait l'amplitude complexe A(x). Ecrire la solution y correspondante sous forme d'une superposition d'ondes progressives.

Solution

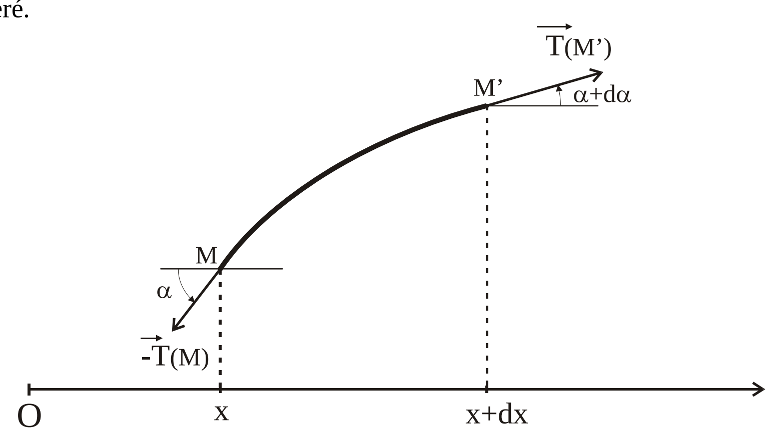
1- Un petit élément dl de corde s'écrit, à un instant donné, en fonction de dx et dy :

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

Or $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$. Pour de petits mouvements, on peut confondre l'angle α et sa tangente. Donc $\alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x}$ est petit en valeur absolue devant 1. En négligeant les termes du second ordre ou d'ordre supérieur, on peut en déduire que :

$$dl \approx dx$$

Le poids étant négligé, l'élément de corde est soumis à deux forces $\vec{T}$(M) et $\vec{T}$(M') exercées par le reste de la corde sur les deux extrémités de l'élément considéré.



La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\mu\, dl\, \vec{a}(M,t) = \vec{T}(M) + \vec{T}(M')$$

où $\vec{a}$ (M,t) est le vecteur accélération

- En projetant suivant l'axe des x on a :

$$0 = - T(M) \cos \alpha + T(M') \cos (\alpha + d\alpha)$$

puisque les mouvements sont supposés transversaux. Les grandeurs T(M) et T(M') désignent les modules des tensions respectivement en M et M'. Le petit angle $d\alpha$ correspond à la variation de l'angle α au voisinage du point M à un instant donné, soit : $d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$.

Au premier ordre en α, on a : $\cos \alpha \approx \cos (\alpha + d\alpha) \approx 1$. Il vient :

T(M) = T(M'). La tension a un module constant noté T dans la suite. Ce module est indépendant du temps car la force de tension imposée à la corde est supposée constante.

- En projetant la relation fondamentale de la dynamique suivant l'axe des y, on a

$$\mu\, dl \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \sin (\alpha + d\alpha) - T \sin \alpha$$

Au premier ordre en α, on a : $\sin \alpha \approx \alpha$ et $\sin (\alpha + d\alpha) \approx \alpha + d\alpha$

ce qui donne: $\mu\, dl \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\, d\alpha$

En remplaçant dl par dx ; α par $\frac{\partial y}{\partial x}$ et $d\alpha$ par $\frac{\partial \alpha}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$, on aboutit à :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

soit encore :
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

qui est l'équation d'onde, appelée "équation de d'Alembert", à une dimension et traduisant la propagation d'un ébranlement à la vitesse constante:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

2. On : $y(x, t) = A(x) \exp(i\omega t)$

En dérivant deux fois y par rapport à x et à t, puis en remplaçant dans l'équation de propagation $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ par les expressions obtenues, on aboutit à :

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = - k^2 A \qquad \text{avec } k^2 = \omega^2 \frac{\mu}{T}$$

La solution correspondante s'écrit :

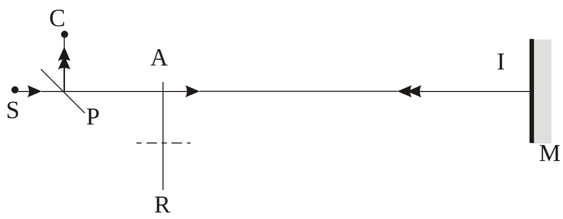
$$y(x, t) = a_1 \exp(ikx + \omega t) + a_2 \exp(ikx - \omega t)$$

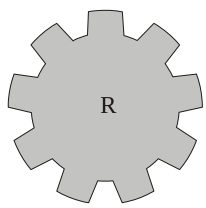
$y(x, t)$ est la superposition de deux ondes progressives se propageant en sens inverse l'une de l'autre avec la vitesse

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

EP.2.6 : Mesure de c par la méthode de la roue dentée (méthode de Fizeau)

Une source ponctuelle S émet de la lumière dans la direction SI. La lumière est réfléchie en I par un miroir plan M perpendiculaire à la direction SI. Elle est ensuite déviée à angle droit par une lame semi-transparente P et reçue sur une cellule photoélectrique en C.





Une roue dentée munie à sa périphérie de p dents identiques régulièrement réparties est disposée normalement à l'axe du faisceau de que, pendant qu'elle tourne autour de son axe parallèle à SI, le rayon lumineux SI rencontre

alternativement soit une dent, soit un creux. On admettra que les dents et les creux ont même largeur.

1. Soit D la distance AI, N la vitesse de rotation de la roue comptée en tours par seconde. Trouver la condition pour que l'énergie lumineuse reçue en C soit minimale.

2. Ce minimum peut être réalisé pour plusieurs vitesses de rotation de la roue ; quelles sont ces vitesses ?

3. On considère la plus petite vitesse de rotation de la roue qui donne un minimum de lumière en C (première extinction). Calculer la vitesse de la lumière avec les données suivantes : p = 150 ; D = 23 km ; N = 22 tr/s.

4. Sachant que l'indice absolu de l'air est, dans les conditions de l'expérience, n = 1,000275, calculer la vitesse de la lumière dans le vide.

5. Quelle est, à votre avis, la principale source d'erreurs ? Montrer que, parmi les vitesses trouvées en 2, on a intérêt à choisir la plus élevée.

Solution

1. Si p est le nombre de dents, chaque dent est vue du centre de la roue sous l'angle $\alpha = \frac{2\pi}{2p}$. L'énergie lumineuse reçue en C est minimale si, lorsque la lumière fait un aller-retour AIA, une dent remplace un creux. Ceci se traduit par :

$$\omega\,\Delta t = \alpha \qquad \text{avec} \qquad \omega = 2\pi\,N \qquad \text{et} \qquad \Delta t = \frac{2D}{c}$$

soit : $$N = \frac{c}{4D\,p}$$

2. En réalité, cette condition s'écrit de façon plus générale :

$$\omega\,\Delta t = (2k+1)\,\alpha \qquad \text{avec} \quad k \text{ entier positif}$$

$$N = (2k+1)\,\frac{c}{4D\,p} \qquad \text{avec} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

3. Les données correspondent à k = 0

$$c = 3{,}036.10^{8}\ \text{m/s}$$

4. On a: $c_0 = n\,c = 3{,}037.10^{8}$ m/s

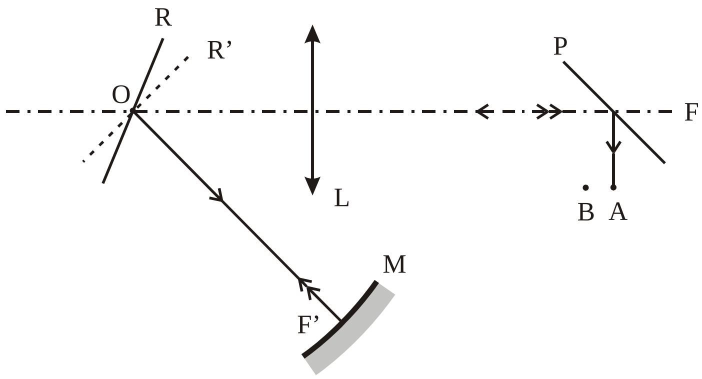
5. La principale cause d'erreur réside dans la difficulté d'apprécier la position d'un minimum ; cette difficulté se traduit par une incertitude ΔN sur N qui est de l'ordre d'une fraction de la valeur la plus basse $N_0 = \Delta N = \frac{N_0}{q}$ où q est, par exemple, de l'ordre de 10 :

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta N}{N} = \frac{N_0}{qN} = \frac{1}{q\,(2k+1)}$$

La précision augmente donc avec k.

EP.2.7 : Mesure de c par la méthode du miroir tournant (méthode de Foucault)

La lumière issue d'une fente F est réfléchie par un miroir plan R tournant autour d'un axe de son plan, dont la trace est en O sur la figure. Une lentille convergente L forme de la source F une image F' sur un miroir sphérique M. Le centre du miroir est en O. Enfin, P est une lame semi-argentée, orientée à 45° de l'axe FO.



1. Si l'on fait tourner le miroir plan d'un petit angle, l'image F' de F balaie M.

Montrer que, quelle que soit la position de R, l'image de retour est toujours située en A, image de F dans la lame P. (on pourra tracer la circonférence de centre O et de rayon OF' et considérer l'image F'_0 que L donnerait de F si R n'existait pas)

2. Si le miroir est mis en rotation rapide, il tourne d'un angle ROR' pendant le temps nécessaire à la lumière pour parcourir le trajet OF'O. L'image de F se formera en B.

Montrer que la mesure du déplacement AB permet de calculer la vitesse de la lumière.

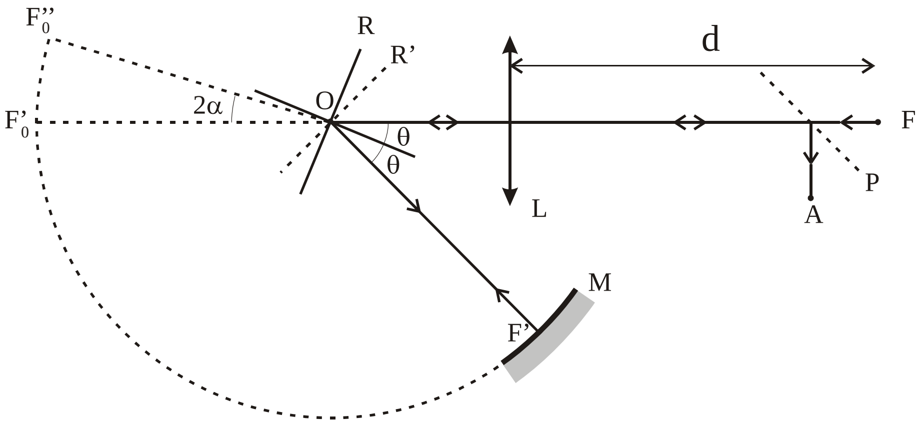
On donne les valeurs suivantes :

OF' = D = 20 m
N = 800 tr/s : vitesse de rotation du miroir
f = 50 cm : distance focale de la lentille
AB = 0,67 mm

Calculer c ; on considèrera que la distance D est assez grande pour que F soit pratiquement au foyer de L.

Solution

1. Soit F_0 l'image que L donnerait de F si R n'existait pas ; on peut considérer que F' est l'image de F_0 par R. Le rayon se réfléchit en F'; son image dans R est à nouveau F_0 quel que soit θ et l'image de F_0 dans R puis dans P est A. Cette position est indépendante de θ. Si l'on fait tourner lentement le miroir R, F' décrit M mais F_0 est immobile.



2. Si le miroir R est mis en rotation à la vitesse angulaire ω, il tourne d'un angle $\alpha = \omega \Delta t = 2\omega \dfrac{D}{c}$ pendant la durée $\Delta t = 2\dfrac{D}{c}$ du trajet OF'O de la lumière. Cet angle est indépendant de θ.

En reprenant le raisonnement précédent, on voit qu'après une seconde réflexion sur R, le rayon semble venir de F_0''. On remarque que la position de F_0'' ne dépend que de $\alpha = 2\omega\dfrac{D}{c}$ et est indépendante de θ. L puis P donnent de F_0'' une image en B. Si l'on désigne par d la distance FL (en pratique $d \approx f$) :

$$AB = 2\,\alpha\, d \qquad \text{avec} \qquad \alpha = 2\,\omega\frac{D}{c}\ ; \quad \omega = 2\,\pi\,N \quad \text{et} \quad d \approx f$$

On en déduit que : $\quad c \approx 8\pi\, ND\,\dfrac{f}{AB} \approx 3{,}001.10^{8}$ m/s

Rappelons que la valeur précise de c est :

c = 299 792 458 m/s.

CHAPITRE 3

LOIS GENERALES DE L'OPTIQUE GEOMETRIQUE

L'optique géométrique est fondée essentiellement sur le principe de la propagation rectiligne de la lumière et sur les lois de Snell -Descartes qui fixent les directions des rayons réfléchi et réfracté par rapport au rayon incident à la surface de séparation de deux milieux transparents et homogènes.

On peut donner aux lois de Snell –Descartes des formes différentes qu'on désigne par principe de Fermat, théorème de Malus, construction de Huygens . Le principe de Fermat, en particulier, ou principe de moindre temps, énoncé trente ans après les lois de Snell – Descartes constitue l'un des plus beaux principes de la physique. Fermat lui-même disait à propos de ce principe : « Le fruit de mon travail a été le plus extraordinaire, le plus imprévu et le plus heureux qui fût jamais. Car [....] j'ai trouvé que mon principe donnait justement et précisément la même proportion de réfraction que Monsieur Descartes a établie. ». Ce principe, qui est un premier exemple de calcul variationnel a ouvert une voie qui s'est révélée très fructueuse en physique avec Maupertuis, Euler, Lagrange et bien d'autres.

Nous allons donc, après avoir présenté les lois de Snell – Descartes et décrit quelques unes de leurs applications (primes à réflexion totale, fibres optiques, …)énoncer le principe de Fermat et en déduire les lois de Snell – Descartes et le théorème de Malus. On abordera ensuite l'étude des trajectoires des rayons lumineux dans les milieux inhomogènes et on présentera une de leur principale application : le phénomène de mirage.

1. Lois de Snell-Descartes

Les lois de Snell - Descartes fixent la direction des rayons réfléchi et réfracté par rapport à celle du rayon incident.

1.1. Première loi de Descartes

1.1.1. Plan d'incidence

Le rayon incident rencontre la surface de séparation au point d'incidence I. Soit $\overrightarrow{N'N}$ la normale à la surface de séparation au point I. Le rayon incident et cette normale définissent un plan appelé "*plan d'incidence*".

1.1.2. Énoncé de la première loi

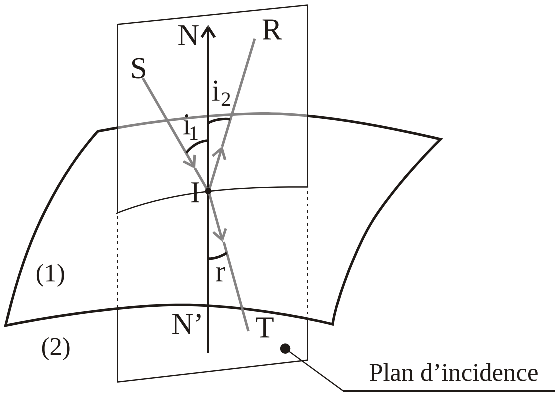
Les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence.

1.2. Deuxième loi de Descartes

Notons : $i_1 = (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{SI})$: angle d'incidence

$r = (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IR})$: angle de réflexion

$i_2 = (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IT})$: angle de réfraction



1.2.1. Loi relative au rayon réfléchi

" Les angles d'incidence et de réflexion ont des valeurs égales mais des signes opposés "

$$\mathbf{r = - i_1}$$

1.2.2. Loi relative au rayon réfracté

"Il existe un rapport positif constant entre les sinus des angles d'incidence et de réfraction"

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \text{constante}$$

Ce rapport ne dépend que de la nature des milieux en contact et de la célérité de la lumière, pour la radiation considérée, dans ces milieux.

On a alors : $$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{v_2}\frac{v_1}{c} = \frac{n_2}{n_1}$$

La deuxième loi de Descartes relative à la réfraction s'écrit de manière symétrique :

$$\mathbf{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$$

relation qui fait jouer le même rôle aux milieux (1) et (2), donc indépendante du sens de la lumière et qui traduit le principe du retour inverse de la lumière.

1.3. Réfraction limite - Réflexion totale

L'angle de réfraction i_2 est au maximum égal à $\frac{\pi}{2}$ et selon la valeur du rapport $\frac{n_1}{n_2}$ le rayon réfracté peut ne pas exister. Examinons les différents cas possibles.

1.3.1. Cas où $n_1 < n_2$

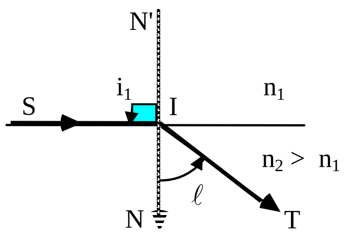
On dit, dans ce cas, que la lumière passe d'un milieu à un autre plus réfringent et l'on a :

$\frac{n_1}{n_2} < 1$ soit $\sin i_2 < \sin i_1$ d'où $\mathbf{i_2 < i_1}$

l'angle de réfraction est inférieur à l'angle d'incidence et il existe toujours un rayon réfracté. Celui-ci se rapproche de la normale.

Lorsque $i_1 = \frac{\pi}{2}$, i_2 atteint une valeur limite ℓ appelée "***angle limite de réfraction***" donnée par :

$$\mathbf{\sin \ell = \frac{n_1}{n_2}}$$



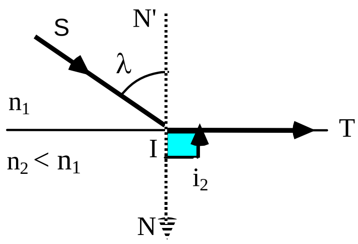
1.3.2. Cas où $n_1 > n_2$

La lumière passe d'un milieu à un autre moins réfringent et l'on a :

$\frac{n_1}{n_2} > 1$ soit $\sin i_2 > \sin i_1$ d'où $\mathbf{i_2 > i_1}$

Le rayon réfracté s'éloigne de la normale.

Pour une certaine valeur λ de l'angle d'incidence, l'angle de réfraction i_2 est égal à $\frac{\pi}{2}$,



soit : $$\sin \lambda = \frac{n_2}{n_1}$$

λ est l'angle critique d'incidence .

Si l'angle d'incidence est supérieur à λ , **il n'y a plus de rayon réfracté** et l'on a " **réflexion totale** "

Ordre de grandeur de λ pour des dioptres usuels :

dioptre air - eau (n = 1,33) → λ ≈ 49°

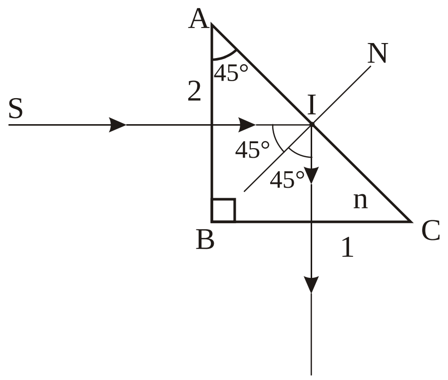
dioptre air - verre (n = 1,5) → λ ≈ 42°

1.4.-Applications

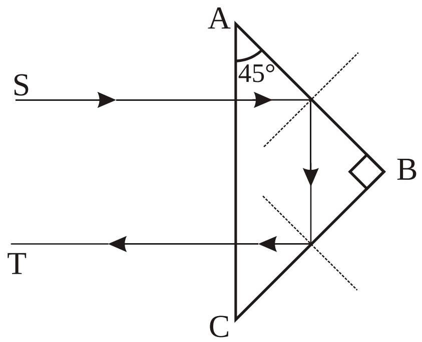
1.4.1. Prismes à réflexion totale

Ces prismes dont la section droite est un triangle rectangle isocèle sont utilisés pour dévier un faisceau lumineux parallèle de $\frac{\pi}{2}$ ou de π .

Considérons un tel prisme taillé dans du verre d'indice n = 1,5, plongé dans l'air, d'indice 1, et un rayon lumineux normal à la face AB de ce prisme. L'angle critique d'incidence sur la face AC (λ ≈ 42°) est supérieur à l'angle d'incidence (i = 45°) sur cette face qui se comporte donc comme un miroir (réflexion totale). Les rayons incident et émergent sont perpendiculaires.



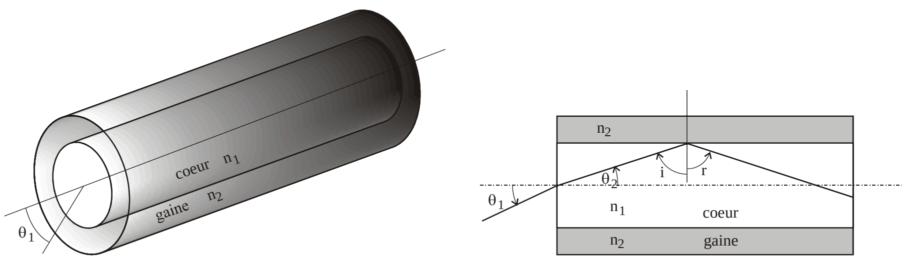
Si le rayon incident est normal à la face AC de ce prisme, on aura une double réflexion totale (l'une sur la face AB et l'autre sur la face BC) et le rayon émergent est parallèle au rayon incident mais se propage dans le sens opposé.



1.4.2. Fibres optiques à saut d'indice

Ces fibres sont également appelées fibres à indices constants. Elles ont connu ces dernières années un développement considérable. Elles sont de plus en plus utilisées dans les lignes téléphoniques.

Les fibres optiques sont constituées de deux câbles cylindriques coaxiaux appelés "cœur" et "gaine". La gaine est fabriquée dans un matériau d'indice n_2 alors que le matériau du cœur est $n_1 > n_2$.



Tout rayon incident qui pénètre dans le cœur sous un angle θ_1 tel que l'angle d'incidence i_1 sur le dioptre cœur-gaine soit supérieur à l'angle critique d'incidence, subira une réflexion totale. Le rayon réfléchi subit encore une réflexion totale lorsqu'il tombe de nouveau sur le dioptre cœur-gaine. Le rayon est ainsi "piégé" à l'intérieur de la fibre.

On a : $\sin i_1 \geq \dfrac{n_2}{n_1}$ où $i_1 = \dfrac{\pi}{2} - \theta_2$

avec $\sin \theta_2 = \dfrac{\sin \theta_1}{n_1}$

2. Construction de Huygens

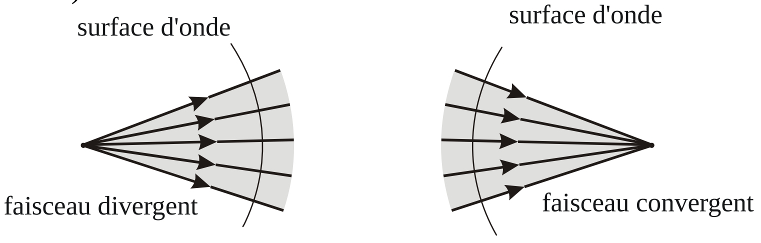
2.1. Surfaces d'onde

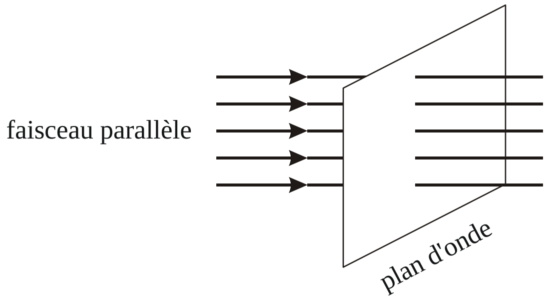
Nous avons vu dans le chapitre précédent que la surface d'onde ou surface équiphase est le lieu des points atteints simultanément par une phase donnée de l'onde émise par une source ponctuelle S.

Dans un milieu donné, cette surface d'onde est :

• une sphère de centre S lorsque la source se trouve à une distance finie (faisceau divergent ou convergent) du lieu d'observation.

• un plan lorsque la source est à une très grande distance (faisceau parallèle) de ce lieu.





La définition du chemin optique va nous permettre de préciser la notion de surface d'onde et d'en tirer certaines conséquences.

Considérons un faisceau de rayons lumineux passant tous par un même point S.

On appelle surface d'onde le lieu des points situés sur ces rayons à un même chemin optique de S.

Il en résulte que :

• les chemins optiques évalués sur des rayons lumineux entre deux surfaces d'onde Σ_1 et Σ_2 sont égaux,

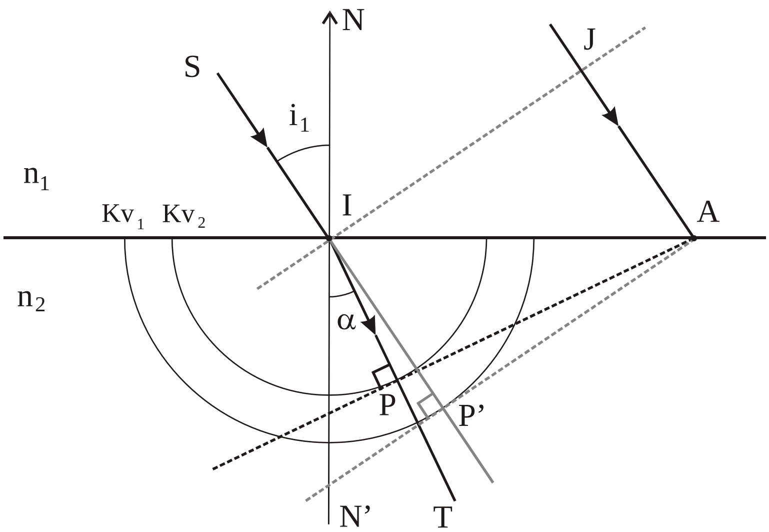
• les rayons lumineux sont normaux aux surfaces d'onde (voir théorème de Malus).

2.2. Construction du rayon réfracté

Considérons une **surface de séparation plane** (S) entre deux milieux (1) et (2) dans lesquels la lumière se propage aux vitesses v_1 et v_2.

• Premier cas : $v_1 > v_2$, soit $n_1 < n_2$

Soit SI le rayon incident; nous supposerons qu'il fait partie d'un faisceau parallèle dont S'A est un autre rayon. Traçons, dans le plan d'incidence, les demi cercles de centre I et de rayons $R_1 = Kv_1$ et $R_2 = Kv_2$ où K est une constante.



La surface d'onde passant par I dans le milieu (1) est un plan perpendiculaire aux rayons et qui coupe le second rayon en J. Dans le milieu (2), les surfaces d'onde sont également des plans.

Prolongeons le rayon SI. Ce dernier coupe le demi cercle R_1 en P. La tangente en P au demi cercle représente la trace du plan d'onde passant par A, relatif au milieu (1) : PA est parallèle à IJ.

Menons de A la tangente au demi cercle R_2. Soit P' le point de tangence. Nous allons démontrer que P'A représente la trace du plan d'onde passant par A, relatif au milieu (2) et que IP' se confond donc avec le rayon réfracté. On a, en effet :

- dans le triangle IPA : $IP = IA \cos\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) = IA \sin i_1 = Kv_1$

- dans le triangle IP'A : $IP' = IA \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = IA \sin \alpha = Kv_2$

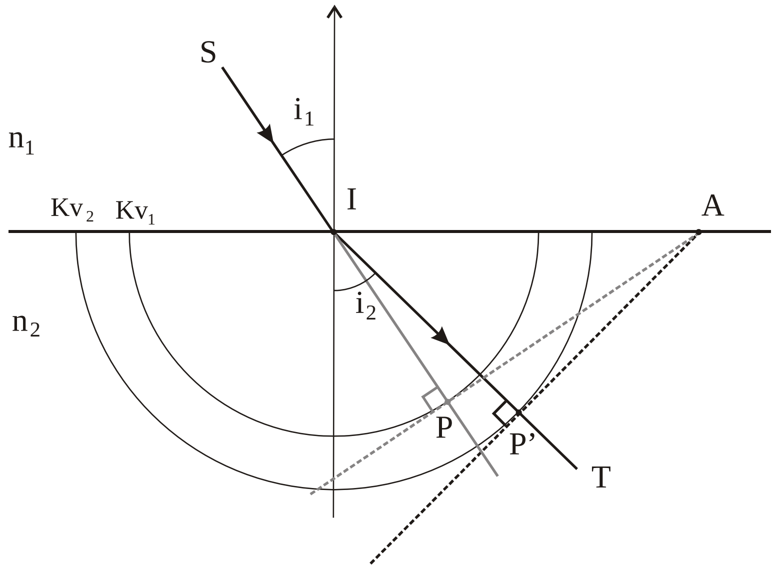
soit : $\dfrac{\sin i_1}{\sin \alpha} = \dfrac{v_1}{v_2}$ d'où $\alpha = i_2$

α est donc l'angle de réfraction et IP' est le rayon réfracté.

Deuxième cas : $v_1 < v_2$, soit $n_1 > n_2$

On procède comme précédemment, mais le demi cercle de rayon R_1 est maintenant intérieur au demi cercle de rayon R_2, ce qui entraîne que l'angle de réfraction i_2 est supérieur à l'angle d'incidence i_1.

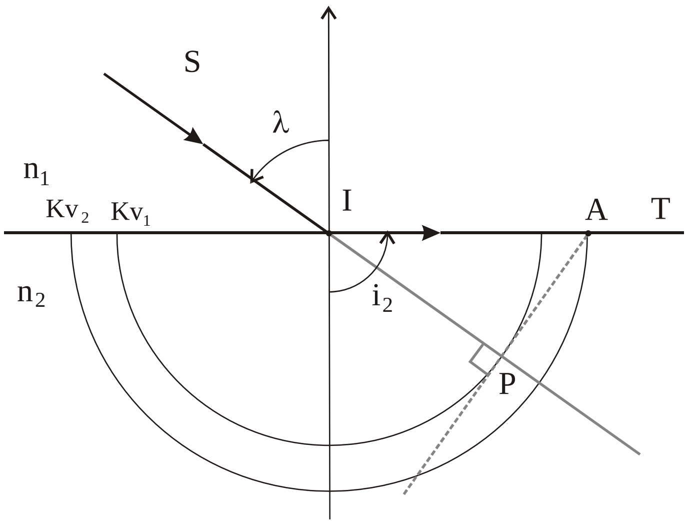
On remarquera que pour que cette construction soit possible, il faut que le point A soit extérieur au demi cercle de rayon R_2.



A la limite, lorsque le point A est juste à l'intersection de ce demi cercle et de la surface de séparation, on aura :

$$IP = Kv_1 = IA \sin i_1 = Kv_2 \sin i_1$$

soit : $$\sin i_1 = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = \sin \lambda$$ où λ est l'angle critique d'incidence.



3. Principe de Fermat

Soient, dans un milieu donné, deux points A et B. Il existe une infinité de trajets possibles joignant A et B. Tous ces trajets ne sont pas effectivement suivis par la lumière. Nous nous proposons de chercher quels sont le ou les trajets qui constituent des *rayons lumineux*, c'est-à-dire les trajets qui sont effectivement suivis par la lumière.

Le principe de Fermat (énoncé en 1657) nous fournit cette réponse. Il peut être considéré comme le principe fondamental de l'optique géométrique. Nous allons montrer qu'il contient, en effet, le principe de propagation rectiligne de la lumière, le principe du retour inverse et les lois de Snell-Descartes.

3.1. Énoncé du principe

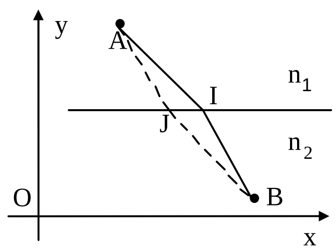
Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B est celui pour lequel le chemin optique est extrémal - ou, en toute généralité, stationnaire - c'est-à-dire maximal ou minimal par rapport aux trajets voisins imaginables.

Voyons comment le principe de Fermat s'écrit lorsque la lumière se propage dans plusieurs milieux d'indices différents. Pour cela, considérons un trajet AIB comportant deux tronçons AI et IB contenus dans des milieux homogènes d'indices différents n_1 et n_2 séparés par une surface plane.

Le chemin optique [AB] a pour expression :

$$L_{AB} = [AB] = n_1\ AI + n_2\ IB$$

D'après le principe de Fermat, si ce trajet est effectivement suivi par la lumière, il sera soit minimum soit maximum.



Soit un système d'axes orthonormé ($\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$) lié à la surface plane. Dans ce système, le point I a pour coordonnées (x, y) et un point J du dioptre infiniment voisin de I aura pour coordonnées (x + dx, y + dy).

Supposons que la lumière suit le trajet AJB. La variation du chemin optique L = [AB] entre ces deux trajets voisins s'écrit :

$$dL = \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) dy$$

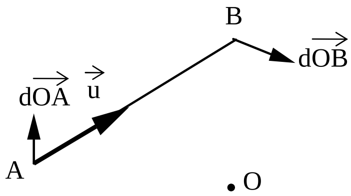
Dire que le chemin optique est extrémal, c'est écrire que

$$\mathbf{dL = 0} \text{ soit : } \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \quad \textbf{et} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) = 0$$

3.2. Conséquences du principe de Fermat

3.2.1. Résultat préliminaire : Variation de la longueur d'un segment AB lorsque ses extrémités subissent de petits déplacements

Soit un segment de longueur AB tel que : $AB = \sqrt{(\overrightarrow{AB})^2}$



On a : $|\overrightarrow{AB}|^2 = \overrightarrow{AB}^2$

La différentiation de cette relation donne :

$$2\,|\overrightarrow{AB}|\,d(|\overrightarrow{AB}|) = 2\,\overrightarrow{AB}.d\overrightarrow{AB}$$

soit : $$d(|\overrightarrow{AB}|) = \frac{\overrightarrow{AB}.d\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}.d(\overrightarrow{OB} - d\overrightarrow{OA})$$

où $d\overrightarrow{OA}$ et $d\overrightarrow{OB}$ représentent les déplacements élémentaires de A et de B et O un point fixe.

Or $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \vec{u}$ n'est rien d'autre que le vecteur unitaire de la direction AB, dirigé de A vers B. Nous avons donc :

$$d(|\overrightarrow{AB}|) = \vec{u}\,.\,d(\overrightarrow{OB} - d\overrightarrow{OA}) \qquad (9)$$

3.2.2. Propagation rectiligne et retour inverse

Supposons que les deux points A et B se trouvent dans le même milieu homogène et isotrope d'indice n. Le chemin optique est, dans ce cas, minimal si le trajet AB est un segment de droite :

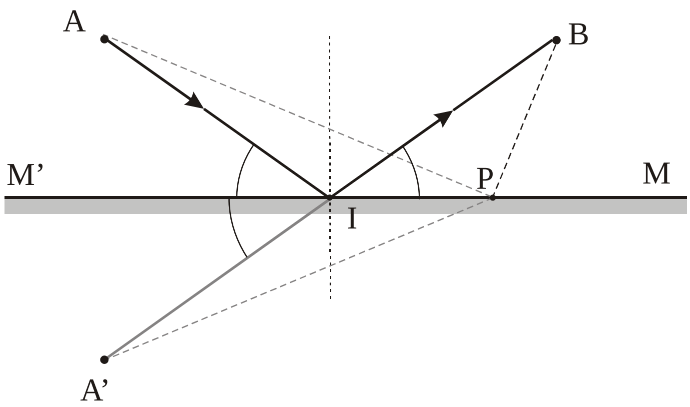
$$[AB] = \int_A^B n\,dl = n\int_A^B dl = n\,\overset{\frown}{AB} \quad \text{et} \quad \overset{\frown}{AB}_{min} = AB$$

C'est la loi de propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène.

De même, le principe de Fermat contient la loi du retour inverse puisque si [AB] est minimal, [BA] le sera aussi.

Exemple :

Considérons une source de lumière placée en A au dessus d'un miroir plan M'M. Un rayon lumineux se réfléchit en I sur le miroir et atteint un point B.



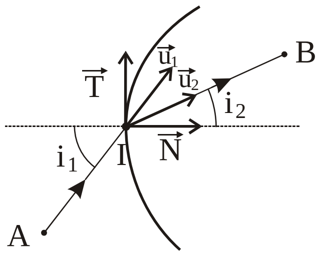
Considérons le point A' symétrique de A par rapport au miroir. Les lois de la réflexion et la définition du point A' montrent que les angles AIM', A'IM' et BIM sont égaux, ce qui entraîne que les trois points A’, I, B sont alignés.

Nous voyons que le chemin AIB effectivement suivi par la lumière se traduit par une droite (A'IB) alors que tout autre chemin - comme le chemin APB - se traduit par la somme de deux segments de droites (A'P et PB) formant une ligne brisée. La lumière a donc emprunté le trajet le plus court.

3.2.3. Lois de Snell-Descartes

3.2.3.1. Lois de la réfraction

Soient A et B deux points situés dans deux milieux homogènes d'indices respectifs n_1 et n_2, séparés par un dioptre. Le trajet suivi par la lumière est formé de deux segments de droite AI et IB se rejoignant en I sur la surface du dioptre.



En prenant comme orientation positive le sens de la lumière, notons :

- $\vec{u}_1$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{AI}$
- $\vec{u}_2$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{IB}$
- $\vec{N}$ le vecteur unitaire normal en I à la surface du dioptre

Le chemin optique entre A et B s'écrit :

$$[AB] = n_1 \, AI + n_2 \, IB$$

Appliquons le principe de Fermat en écrivant que la différentielle de [AB] est nulle :

$$d[AB] = n_1 \, d(AI) + n_2 \, d(IB)$$

On a : $AI = \vec{u}_1 . \overrightarrow{AI}$ et $IB = \vec{u}_2 . \overrightarrow{IB}$

Il vient : $d(AI) = \vec{u}_1 . d\left(\overrightarrow{AI}\right) + d\vec{u}_1 . \overrightarrow{AI} = \vec{u}_1 . d\left(\overrightarrow{AI}\right)$

$$d(IB) = \vec{u}_2 . d(\overrightarrow{IB}) + d\vec{u}_2 . \overrightarrow{IB} = \vec{u}_2 . d(\overrightarrow{IB})$$

car $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont des vecteurs unitaires de modules constants, ils sont perpendiculaires à leurs différentielles ($\overrightarrow{u^2}$ = 1 = constante ⇒ $\vec{u}.d\vec{u}$ = 0)

La différentielle de [AB] s'écrit donc :

$$d[AB] = n_1\,\overrightarrow{u_1}.d(\overrightarrow{AI}) + n_2\,\overrightarrow{u_2}.d(\overrightarrow{IB})$$

En prenant un point O arbitraire, on obtient :

$$d[AB] = n_1\,\overrightarrow{u_1}.d(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OI}) + n_2\,\overrightarrow{u_2}.d(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB})$$

Puisque les points A et B sont fixes ($d\overrightarrow{OA} = d\overrightarrow{OB} = \vec{0}$), on aura :

$$d[AB] = n_1\,\overrightarrow{u_1}\,.\,d\overrightarrow{OI} + n_2\,\overrightarrow{u_2}\,.\,(-\,d\overrightarrow{OI})$$

soit : $$d[AB] = (\,n_1\,\overrightarrow{u_1} - n_2\,\overrightarrow{u_2}\,)\,.\,d\overrightarrow{OI}$$

Cette expression doit être nulle pour tout déplacement $d\overrightarrow{OI}$ s'effectuant à la surface du dioptre. Le vecteur ($n_1\,\overrightarrow{u_1} - n_2\,\overrightarrow{u_2}$) est donc colinéaire à la normale $\vec{N}$ en I au dioptre :

$$n_1\overrightarrow{u_1} - n_2\overrightarrow{u_2} = \alpha\,\vec{N} \qquad \text{où } \alpha \text{ est une constante.}$$

Les trois vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\vec{N}$ qui sont liés par une relation linéaire, sont dans un même plan déterminé par $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{N}$, appelé plan d'incidence.

Nous retrouvons donc la première loi de la réfraction : **le rayon réfracté, dirigé suivant $\overrightarrow{u_2}$, est dans le plan d'incidence**.

Plaçons nous dans le plan d'incidence. Soit $\vec{T}$ le vecteur unitaire de la tangente à la section du dioptre, orthogonal à $\vec{N}$ tel que $(\vec{N},\vec{T}) = \frac{\pi}{2}$.

Multiplions scalairement par $\vec{T}$ les deux membres de la relation (1), on trouve :

$$n_1\,\overrightarrow{u_1}\,.\,\vec{T} - n_2\,\overrightarrow{u_2}\,.\,\vec{T} = 0$$

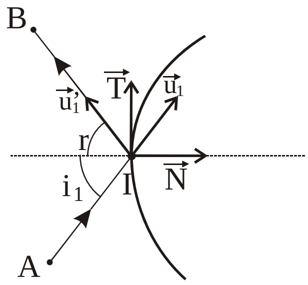
Si on pose $i_1 = (\vec{N},\overrightarrow{u_1})$ et $i_2 = (\vec{N},\overrightarrow{u_2})$, l'égalité précédente s'écrit :

$$n_1 \sin i_1 - n_2 \sin i_2 = 0$$

Nous venons de retrouver la deuxième loi de Descartes de la réfraction.

3.2.3.2. Lois de la réflexion

La démonstration est en tous points analogue à celle que nous venons de faire.



Soit $\overrightarrow{u'_1}$ le vecteur unitaire du rayon réfléchi.
Le principe de Fermat s'écrit :

$$d[AB] = (n\ \overrightarrow{u_1} - n\ \overrightarrow{u'_1}) . d\overrightarrow{OI} = 0$$

soit : $\overrightarrow{u_1} . \overrightarrow{T} - \overrightarrow{u'_1} . \overrightarrow{T} = 0$

Si on pose : $r = (\overrightarrow{N} , - \overrightarrow{u'_1})$
on obtient : $\sin i_1 - \sin(- r) = 0$

Les rayons incident et réfléchi sont symétriques par rapport à la normale :

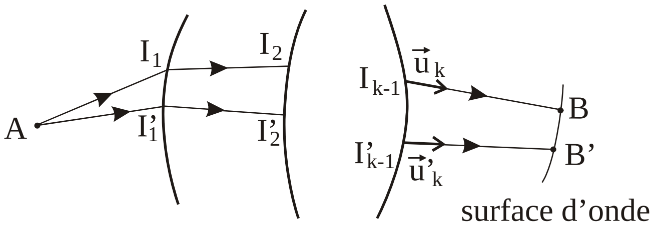
$$i_1 = - r$$

C'est la deuxième loi de Descartes relative à la réflexion.

3.2.4. Théorème de Malus

Ce théorème stipule que les rayons lumineux sont normaux aux surfaces d'onde.

Appliquons le principe de Fermat pour le retrouver. Pour ce faire, considérons un faisceau de rayons lumineux passant tous par un même point A.



Supposons que pour aller du point A à un point B appartenant à une surface d'onde, la lumière traverse une suite de milieux homogènes d'indices n_1, n_2,…, n_{k-1}, n_k. Le trajet du rayon AB est alors une suite de segments de droite :

$$AI_1,\ I_1I_2,\ \ldots,I_{k-1}B.$$

Considérons un trajet AB' infiniment voisin **lui aussi suivi par la lumière** aboutissant au point B' de la même surface d'onde. Par définition d'une surface d'onde, la variation du chemin optique sur ces deux trajets est nulle.

Puisque A est fixe, cette variation s'écrit :

$$(n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2).\, d\overrightarrow{OI_1} + \ldots + (n_{k-1} \vec{u}_{k-1} - n_k \vec{u}_k).\, d\overrightarrow{OI_{k-1}} + n_k \vec{u}_k \,.\, d\overrightarrow{OB} = 0$$

D'après les lois de Descartes, tous les termes sont nuls à l'exception du dernier. Par conséquent : $n_k \vec{u}_k \,.\, d\overrightarrow{OB} = 0$

Les vecteurs $\vec{u}_k$ et $d\overrightarrow{OB}$ sont donc perpendiculaires entre eux quel que soit le déplacement $d\overrightarrow{OB}$ sur la surface d'onde. Le vecteur unitaire $\vec{u}_k$ porté par le rayon Ik-1B est donc normal en B à la surface d'onde.

3.2.5. Conclusion

Le principe de Fermat contient bien toutes les lois de l'optique géométrique. Il constitue bien le principe fondamental de l'optique géométrique.

4. Trajectoire dans un milieu inhomogène

Nous avons tous vu des objets situés derrière une flamme " danser ". Ce phénomène s'explique par les fluctuations spatio-temporelles de l'indice de l'air dues à la variation irrégulière de la température aux alentours de la flamme.

De même, lorsque l'indice de l'air varie de manière régulière avec la température, la trajectoire d'un rayon lumineux n'est plus rectiligne et on obtient le phénomène de *mirage.*

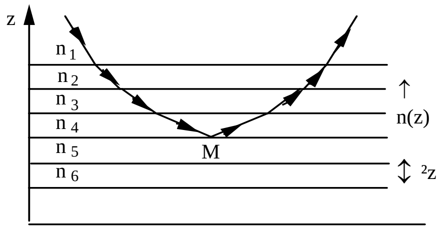
4.1. Marche d'un rayon lumineux

Considérons un milieu formé d'un certain nombre de couches homogènes, parallèles, d'épaisseur Δz, d'indices de réfraction n(z) fonction de l'altitude de la couche et un rayon lumineux se propageant dans la couche d'indice le plus élevé dans le sens des z décroissants.

Ce rayon se réfractera à la traversée de chacune des couches, les rayons réfractés successifs faisant avec la normale un angle plus grand que l'angle d'incidence correspondant.

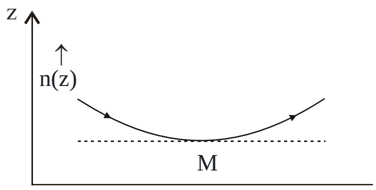
Il arrivera un moment où un des angles d'incidence aura une valeur supérieure à l'angle critique d'incidence λ et le rayon incident subira une

réflexion totale : le rayon lumineux poursuivra son trajet mais dans le sens des z croissants, en subissant des réfractions successives.



Le trajet d'un rayon lumineux sera donc formé par une succession de segments de droites, une des extrémités ayant une altitude minimale.

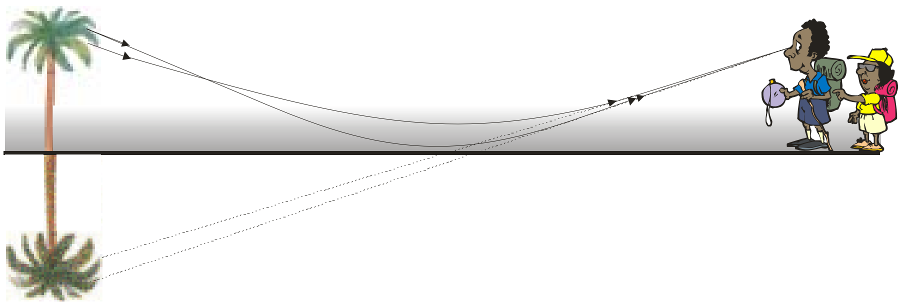
Si l'indice n(z) varie de façon continue avec z, $\Delta z \to 0$, la ligne brisée formant la trajectoire est remplacée par une courbe présentant un extremum pour une certaine valeur de z, la concavité étant tournée vers les zones de plus fort indice (n(z) croissant).



4.2. Applications

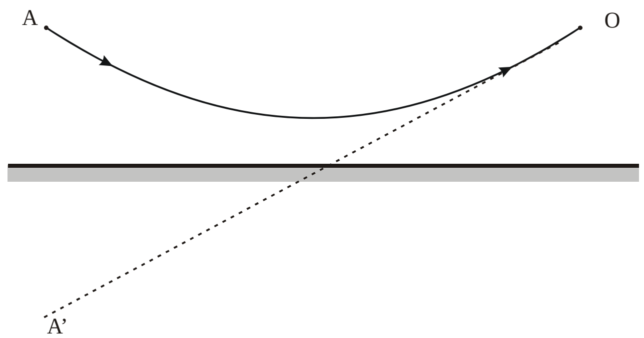
4.2.1. Phénomène de mirage

En été, lorsque le soleil chauffe la surface du sol, ce dernier réchauffe l'air à son voisinage, alors que l'air est plus frais dans les couches supérieures. La température de l'air croît à l'approche du sol, la densité de l'air diminue et l'indice aussi (n est une fonction décroissante de la température) : on obtient le ***phénomène de mirage*** *dit "**inférieur**"*.

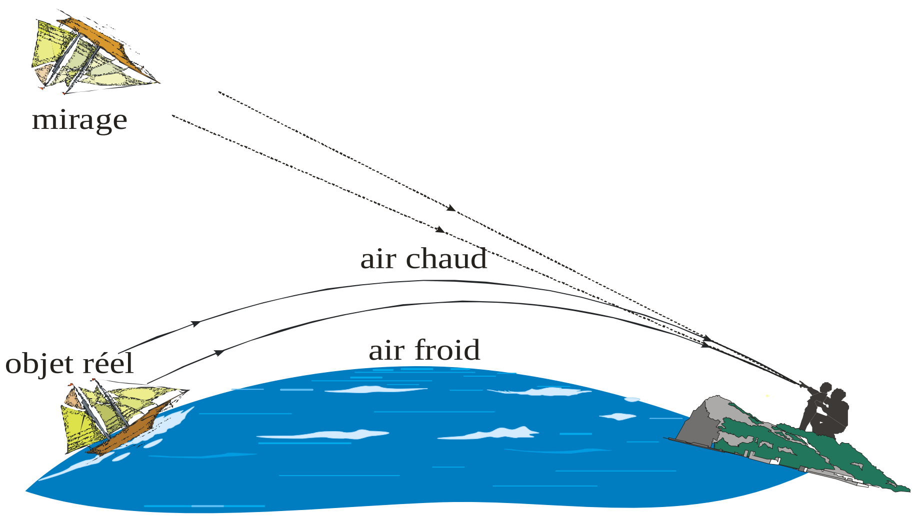


La lumière issue d'un point A, dirigée vers le bas, rencontre des couches à indice décroissant et, pour des inclinaisons convenables, peut subir une

réflexion totale. La lumière est renvoyée vers le haut et l'œil O qui la reçoit situe la source sur la tangente OA' à la partie finale de la trajectoire : le coin du ciel bleu A donne l'illusion de la nappe d'eau A' dans laquelle se réflètent les objets , palmier, par exemple.



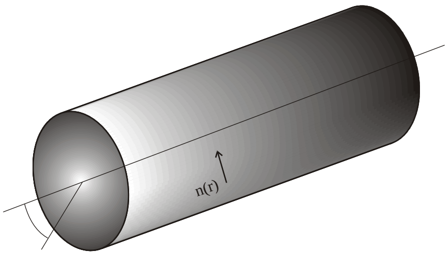
Dans le cas où la température de l'air croît avec l'altitude (au dessus de la surface de la mer, par exemple, lorsque la température de l'eau est bien plus froide que celle de l'air), l'indice de l'air décroît avec l'altitude. On observe alors que la courbe représentant la trajectoire d'un rayon lumineux tourne sa concavité vers le bas (surface de la mer). On obtient dans ce cas le ***phénomène de mirage*** *dit "**supérieur**"*

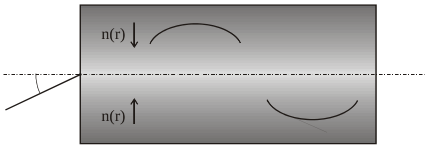


Remarquons enfin que le phénomène de mirage s'observe essentiellement sur les surfaces de grande étendue dépourvues de végétation (désert, océan, …).

4.2.2. Fibres optiques à gradient d'indice

Ces fibres sont fabriquées dans des matériaux dont l'indice n(r) diminue de manière continue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de leurs axes.
Un rayon lumineux qui pénètre dans une telle fibre va voir sa trajectoire s'incurver, atteindre un extremum puis repartir vers l'axe. Le même phénomène se reproduira lorsque le rayon aura dépassé l'axe optique.





Le rayon lumineux continuera son parcours en restant à l'intérieur de la fibre.

Exercices et problèmes

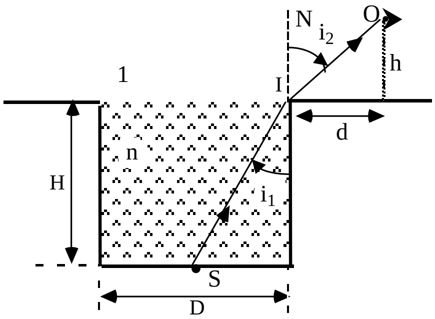
EP.3.1. : Réfraction par un dioptre air-eau

Une source lumineuse S est placée au fond d'une piscine remplie d'eau d'indice n. La piscine a une forme cylindrique de base circulaire de diamètre D et la source S est située au centre de cette base. Un observateur dont les yeux sont à une hauteur h du sol, se tient à une distance d du bord de la piscine.

Quelle doit être la profondeur H de la piscine pour qu'un rayon issu de S et passant par le bord de la piscine soit reçu par l'observateur ?

Application numérique : n = 1,33 ; D = 5,12 m ; h = 1,60 m ; d = 2,56 m.

Solution



En I on a : $n \sin i_1 = \sin i_2$

avec : $\sin i_1 = \dfrac{D}{2\sqrt{\dfrac{D^2}{4} + H^2}}$

$\sin i_2 = \dfrac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}}$

soit : $n \dfrac{D}{2\sqrt{\dfrac{D^2}{4} + H^2}} = \dfrac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}}$

$\Rightarrow$ $H^2 = (n^2 - 1)\dfrac{D^2}{4} + \dfrac{n^2h^2}{d^2}\dfrac{D^2}{4}$

<u>Application numérique</u> : $D = 2d \Rightarrow \dfrac{D^2}{4} = d^2$

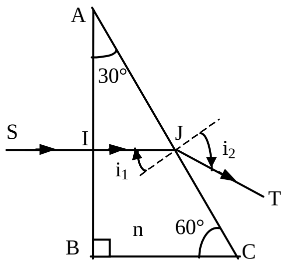
d'où : $H^2 = (n^2 - 1)d^2 + n^2h^2 \Rightarrow$ $\boxed{H = 3,10\ m}$

EP.3.2. : Prisme rectangle

Soit un prisme ABC rectangle en B d'indice n = 1,5. Les angles en A et C valent respectivement 30° et 60°.
Tracer la marche d'un rayon lumineux normal à :
a)- la face AB
b)- la face BC.

Solution

a)- Rayon incident normal à la face AB :



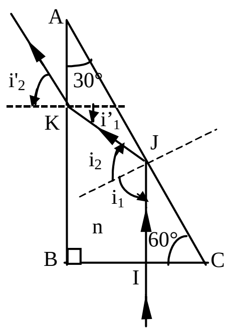
En I, on a une incidence normale, le rayon n'est pas réfracté.
En J : angle d'incidence $i_1 = 30°$

$$\text{d'où : } \sin i_2 = n \sin i_1 = 1,5 \times \frac{1}{2} = 0,75$$

Le rayon émerge par la face AC avec un angle :

$$\boxed{i_2 = 48,6°}$$

b)- Rayon incident normal à la face BC :



En I : incidence normale : le rayon n'est donc pas réfracté.
En J : angle d'incidence $i_1 = 60°$

or $\sin \lambda = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1,5} \rightarrow \lambda = 41,8°$

donc : $i_1 > \lambda \Rightarrow$ réflexion totale

En K : angle d'incidence $i'_1 = 30°$

d'où : $\sin i'_2 = n \sin i'_1 = 1,5 \times \frac{1}{2} = 0,75$

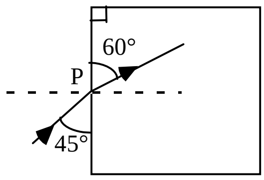
Le rayon émerge par la face AB avec un angle :

$$\boxed{i'_2 = 48,6°}$$

EP.3.3. : Réfraction par un cube

Un rayon lumineux pénètre en P dans un bloc en plastique transparent d'indice n et de forme cubique. On se placera dans le cas où P est le centre d'une des faces.

La figure ci-après schématise une coupe du cube par le plan d'incidence et indique les orientations des rayons incident et réfracté par rapport à la face d'entrée.

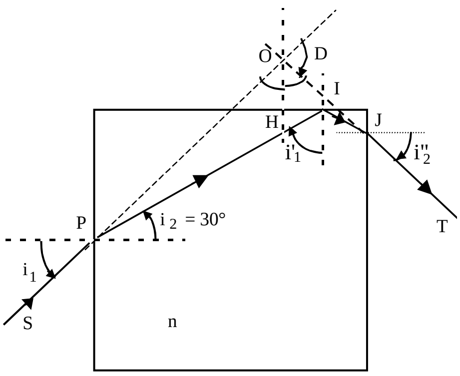


1. Déterminer la vitesse de la lumière dans le plastique.

2. Construire la marche des rayons dans le cube.

3. Déterminer l'angle de déviation (angle formé par les rayons incident et émergent du cube).

Solution



1. Vitesse de la lumière v dans le plastique :

En P : $i_1 = 45°$ et $i_2 = 30°$

d'où : $n = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

soit : $v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{2}} = 2{,}12.\ 10^8$ m/s

2. Marche d'un rayon lumineux dans le cube :

En I : $i'_1 = 60°$

or $\sin\lambda = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \lambda = 45°$

donc : $i'_1 > \lambda \Rightarrow$ réflexion totale

En J : $i''_1 = 30° < \lambda \Rightarrow$ réfraction avec un angle i''_2 tel que :

$\sin i''_2 = n \sin i''_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{i''_2 = 45° = i_1}$

3. Angle de déviation D :

L'angle (POH) vaut : $(POH) = \frac{\pi}{2} - i_1$

L'angle (HOJ) vaut : $(HOJ) = \frac{\pi}{2} - i''_2 = \frac{\pi}{2} - i_1$

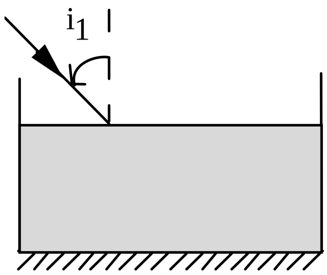
ce qui entraîne que : $D = \pi - (POJ) = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) = 2i_1 \Rightarrow D = 2\, i_1$

EP.3.4. : Association d'un dioptre et d'un miroir plans

On considère un bassin rempli d'un liquide d'indice n = 4/3 et de hauteur h =1.6 m.

1- On place au fond du bassin un miroir plan horizontal

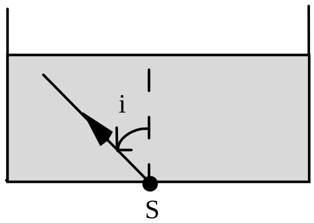
Soit un rayon lumineux incident faisant un angle d'incidence i_1=30° à la surface de l'eau.



1-a- Déterminer l'angle de réfraction i_2.

1-b-. Tracer la marche du rayon lumineux qui émerge du bassin après réflexion sur le miroir. Déterminer la déviation D du rayon lumineux.

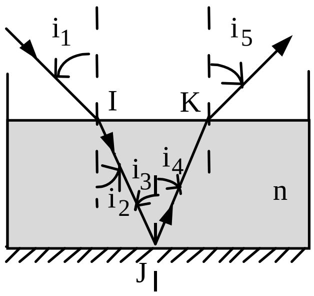
2- On place au centre de la base du bassin une source lumineuse monochromatique S.



2-a- On observe à la surface de l'eau un disque lumineux. Expliquer le phénomène. Calculer le rayon R du disque.

2-b- Tracer la marche de deux rayons lumineux issus de la source correspondant aux angles d'incidence j_1=30° et j_2=60°.

Solution



1-a- D'après la loi de la réfraction, on a $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

Ainsi, $\sin i_2 = \dfrac{\sin i_1}{n} = 0.375$.

D'où $i_2 = 22°$

1-b- D'après la loi de la réflexion,

en J, $i_3 = 22°$, $i_4 = - i_3 = -22°$ et $i_5 = i_6$.

En K, on a $n \sin i_5 = \sin i_6$ d'où $i_6 = - 30°$.

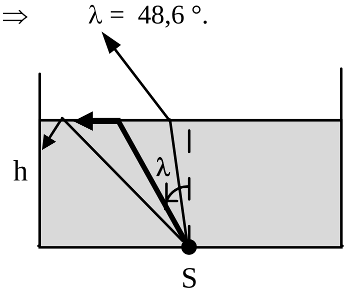
La déviation du rayon lumineux est donnée par la somme des déviations en I, en J et en K : $D = D_I + D_J + D_K$ avec

$D_I = i_2 - i_1 = -8°$, $D_J = 180° - 2\,i_3 = 136°$, $D_K = i_6 - i_5 = -8°$

et $D = 120°$.

2-a- Le rayon lumineux issu de S passe d'un milieu d'indice n à un milieu d'indice inférieur égal à 1 ; il existe un rayon réfracté si et seulement si $i \leq \lambda$ où λ est l'angle limite d'incidence.

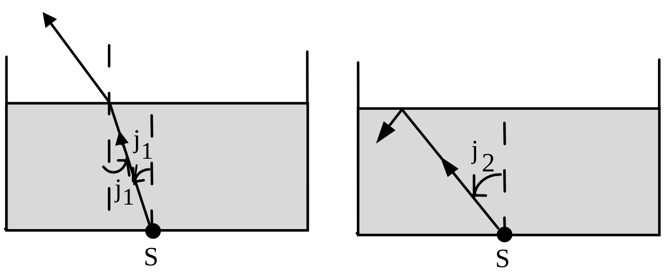
$\sin \lambda = 1/n = 3/4. \Rightarrow \lambda = 48{,}6\,°.$



Ainsi, les rayons issus de S qui ont un angle d'incidence inférieur à λ, traversent le dioptre. En revanche, les rayons issus de S ayant un angle d'incidence supérieur λ, subissent une réflexion totale à la surface du dioptre. Ceci explique l'apparition d'un disque lumineux de rayon R.

$R = h \sin \lambda = 1.2$ m

2-b-

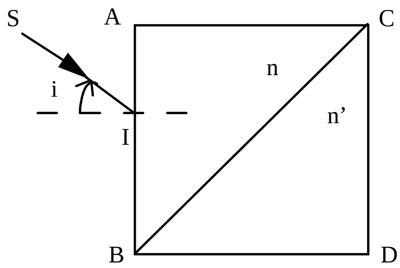


Pour $j_1 = 30\,°$, il y a un rayon réfracté et $n \sin j_1 = \sin j'_1 = 2/3$. $\Rightarrow j'_1 = 41°.8$

Pour $j_2 = 60°$, il y a réflexion totale à la surface du dioptre car $j_2 > \lambda$.

EP.3.5. : Association de deux prismes

On accole deux prismes rectangles isocèles comme l'indique la figure. Le prisme ABC est constitué d'un verre d'indice n = $\sqrt{\frac{3}{2}}$ **alors que le prisme DBC a pour indice n'. Un rayon lumineux SI arrive sur la face AB sous une incidence** $i = -60°$**.**



1- Tracer la marche du rayon lumineux SI à travers le premier prisme.

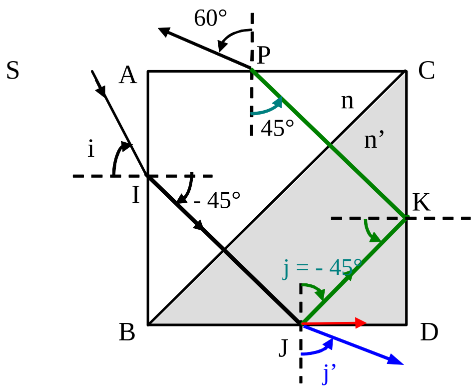
2- Discuter, selon la valeur de l'indice n' du second prisme, les différents trajets possibles de la lumière.

Solution :

1- En I, on a $\sin i = n \sin i'$ $\Rightarrow$ $i' = -45°$.

Le rayon réfracté est orthogonal à la face BC. Il ne subit donc aucune déviation à la traversée du dioptre BC.

2- Le rayon lumineux arrive sur la face BD, en un point J, avec un angle d'incidence donné par : $j = 45°$.



Il y a trois possibilités selon la valeur de n' et de l'angle critique d'incidence $\lambda = \text{Arc}\sin(1/n')$

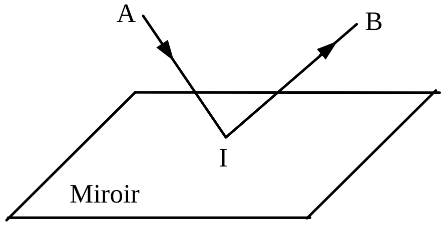
Si $|j| < \lambda \Rightarrow \sin j = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \sin\lambda \Rightarrow n' < \sqrt{2}$: le rayon émerge de la face BD avec un angle d'incidence j' tel que $\sin j' = n' \sin j$

Si $|j| = \lambda \Rightarrow \sin j = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\lambda \Rightarrow n' = \sqrt{2}$: le rayon émerge du prisme parallèlement à la face BD

Si $|j| > \lambda \Rightarrow n' > \sqrt{2}$: il y aura réflexion totale en J. Le rayon arrive en K sur la face CD où il subit encore une réflexion totale. Il arrive en P sur la face AC avec un angle d'incidence égal à 45. Il émerge avec un angle de 60°..

EP.3.6. : Principe de Fermat et lois de la réflexion

Soient deux points A(0,0,a) et B(b,0,c) situés d'un même coté d'un miroir placé dans le plan z = 0 et v la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu.



1- Calculer le temps t mis par la lumière pour parcourir le chemin AIB (I étant un point de la surface du miroir).

2- Evaluer la variation dt correspondant à un petit déplacement de I sur la surface du miroir.

3- Déduire du principe de Fermat la relation liant l'angle d'incidence i à l'angle de réflexion i' et montrer que le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence.

Solution

1. Les coordonnées du point I sont (x,y,0). On a donc :

$$AI = \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$$

$$IB = \sqrt{x^2 + y^2 + c^2}$$

Le temps mis par la lumière pour parcourir le chemin AIB est :

$$t = \frac{AI}{v} + \frac{IB}{v} = \frac{1}{v}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + a^2} + \sqrt{(x-b)^2 + y^2 + c^2}\right)$$

2. On a : $dt = \dfrac{\partial t}{\partial x}dx + \dfrac{\partial t}{\partial y}dy$

soit :

$$dt = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} + \frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + c^2}}\right)dx$$

$$+ \frac{1}{v}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + c^2}}\right)dy$$

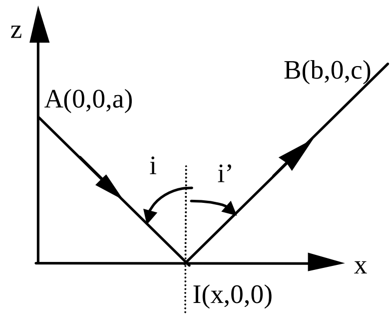
$$L = ct = \frac{c}{v}\left(AI + IB\right) \quad \Rightarrow \quad dL = cdt$$

3. D'après le principe de Fermat, dL=0, par conséquent,

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}} + \dfrac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+y^2+c^2}} = 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{(x-b)^2+y^2+c^2}} = 0 \end{cases}$$

On obtient donc un système de deux équations :

$$\begin{cases} y = 0 & (1) \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \dfrac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}} = 0 & (2) \end{cases}$$



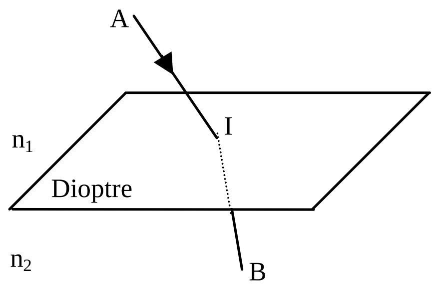
Il en résulte que I appartient au plan $(A, \vec{i}, \vec{k})$ qui est le plan d'incidence.

$$\sin i = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad \text{et} \quad \sin i' = \frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}$$

Par ailleurs, l'équation (2) implique donc que sin i = - sin i'. soit i = - i'.
Nous avons bien retrouvé la loi de Descartes pour la réflexion.

EP.3.7. : Principe de Fermat et lois de la réfraction

Soient deux points A et B situés de part et d'autre d'une surface plane séparant deux milieux où la lumière se propage avec les vitesses v_1 et v_2. On choisit un système d'axes Oxyz tel que la surface de séparation des deux milieux constitue le plan xOy. De plus, A et B ont pour coordonnées : A (0,0,a) et B(d,0,-b).

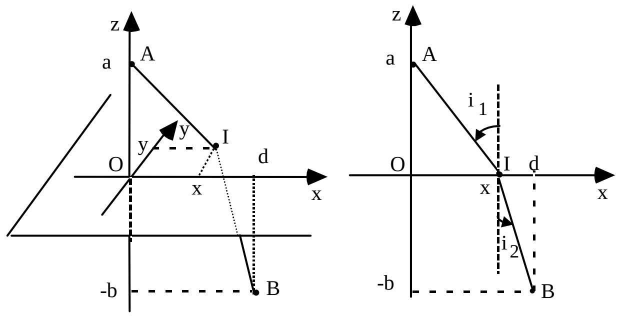


1- Appliquer le principe de Fermat pour déterminer, dans le plan de séparation xOy, la position du point I où le trajet lumineux passe du milieu (1) au milieu (2). Conclure.

2- Appliquer ce résultat au problème suivant : une personne se promène sur une plage à la limite du sable et de l'eau. Arrivée au point O de sa promenade, elle aperçoit un baigneur en danger en un point B de l'eau et veut le secourir le plus rapidement possible.

En supposant qu'elle court trois fois plus vite qu'elle nage, déterminer en quel point de la grève elle devra se mettre à l'eau.

Solution



1. Soient (x,y,0) les coordonnées du point I et t le temps mis pour aller de A à B. On a :

$$t = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2} = \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2 + y^2 + a^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(d-x)^2 + y^2 + b^2}$$

Le chemin optique entre les points A et B s'écrit :

$$L = L(x,y) = ct = \frac{c}{v_1}\sqrt{x^2 + y^2 + a^2} + \frac{c}{v_2}\sqrt{(d-x)^2 + y^2 + b^2}$$

D'après le principe de Fermat, on a :

$$dL = cdt = \frac{\partial L}{\partial x}dx + \frac{\partial L}{\partial y}dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0\right\}$$

et par suite :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{c}{v_1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} - \dfrac{c}{v_2}\dfrac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2 + b^2}} = 0 & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{c}{v_1}\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} + \dfrac{c}{v_2}\dfrac{y}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2 + b^2}} = 0 & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) montre que y = 0, ce qui entraîne que le point I est sur l'axe Ox ; il est donc dans le plan d'incidence qui est le plan (AOB). On retrouve ainsi la première loi de Descartes pour la réfraction.

L'équation (1) devient :

$$\frac{c}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{c}{v_2}\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$$

Par ailleurs, on a

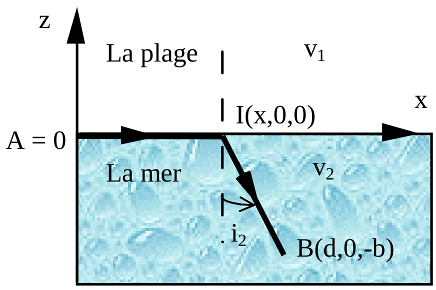
$$\sin i_1=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\quad \sin i_2=\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}},\quad n_1=\frac{c}{v_1}\quad \text{et}\quad n_2=\frac{c}{v_2}$$

Ainsi l'équation (2) établit la seconde loi de Descartes

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

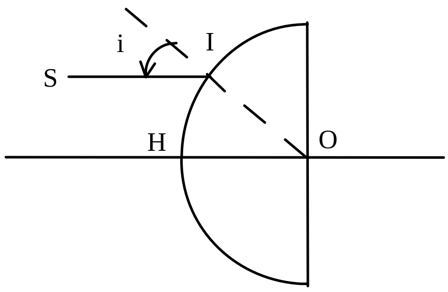
2- Le promeneur se trouve sur l'axe Ox (voir figure), a = 0 et $v_1 = 3v_2$. En utilisant la relation précédente, on a :

$$1=3\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}.\qquad \text{D'où :}\quad x=d-\frac{b}{2\sqrt{2}}$$



EP.3.8. : Réfraction dans une demi boule de verre

Une demi boule sphérique de centre O et de rayon R transparente d'indice n = $\sqrt{2}$ reçoit sur sa face sphérique un rayon lumineux SI parallèle à son axe de symétrie HO sous un angle d'incidence i = 45°



1- Construire la marche du rayon lumineux. Ce rayon émerge-t-il de la boule?

2- Déterminer la déviation du rayon lumineux SI après son passage dans la demi boule.

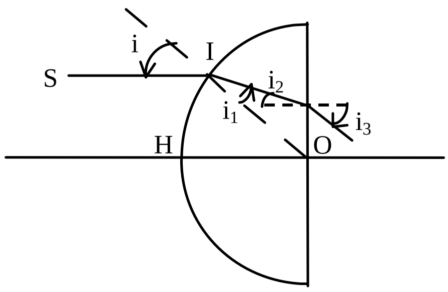
Solution

1-, Soit i_1 l'angle correspondant au rayon réfracté en I. On a :

$\sin i = n \sin i_1$, ce qui donne : $i_1 = 30°$.

Sur la face plane de la demi boule, le rayon arrive en J avec un angle d'incidence $i_2 = -(i - i_1) = 15°$.

Cherchons l'angle critique d'incidence λ qui vérifie dans ce cas $\sin \lambda = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. D'où $\lambda = 45°$. Or $i_2 < \lambda$, il y a donc réfraction en J et le rayon émerge de la face plane de la demi-boule avec un angle : $i_3 = -21° 28'$.



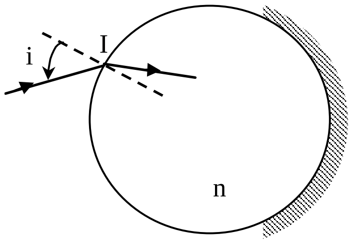
2- La déviation du rayon est donné par :

$D = D_I + D_J = (i - i_1) + (i_3 - i_2) = -21° 28'$.

Cette déviation correspond exactement à l'angle de réfraction en J.

EP.3.9. : Réfraction par une boule argentée

Une boule sphérique transparente d'indice n (>1), dont une partie de la surface est rendue réfléchissante, est placée dans l'air. Un rayon lumineux pénètre dans la boule, se réfléchit sur la partie métallisée puis émerge dans l'air. On notera i l'angle d'incidence



1.Tracer la marche du rayon lumineux.

La déviation D du rayon émergent par rapport au rayon incident est donnée par la valeur absolue de la somme algébrique des déviations en chaque point de contact du rayon lumineux avec la boule. Déterminer D.

2. Pour quelle valeur i_1 de l'angle d'incidence le rayon émergent est-il parallèle au rayon incident.

Application numérique : n = $\sqrt{2}$

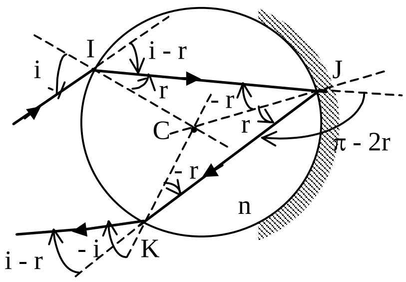
3. Pour quelle valeur i_m de l'angle d'incidence la déviation est-elle minimale? Calculer la déviation correspondante.

Solution

1- En I, i est l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction avec sin i = n sin r. La déviation en I est $D_I = i - r$.

En J, -r est l'angle d'incidence, r est l'angle de réflexion et la déviation en J est $D_J = \pi - 2r$.

En K, -r est l'angle d'incidence, -i est l'angle de réfraction puisque n sin (-r)= sin (-i). La déviation en K est $D_K = i - r$.



La déviation entre le rayon incident et le rayon émergent de la boule est donc $D = D_I + D_J + D_K = \pi + 2i - 4r$.

2- Pour que le rayon émergent soit parallèle au rayon incident, mais de sens opposé , il faut que $D = \pi = \pi + 2i_1 - 4r_1$.

D'où, $i_1 = 2r_1$ avec $\sin i_1 = n \sin r_1$. Il s'ensuit que $\cos i_1 = \frac{n}{2}$.

Application numérique : $n=\sqrt{2}$ et $i_1 = \frac{\pi}{2}$.

3- La déviation D est une fonction de i, r étant relié à i par la relation sin i = n sin r. L'angle d'incidence i_m donnant une déviation minimale est donné par l'équation $\frac{dD}{di} = 2 - 4\frac{dr}{di} = 0$,

or $\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n\cos r} = \frac{\cos i}{n\sqrt{1-\sin^2 r}} = \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$.

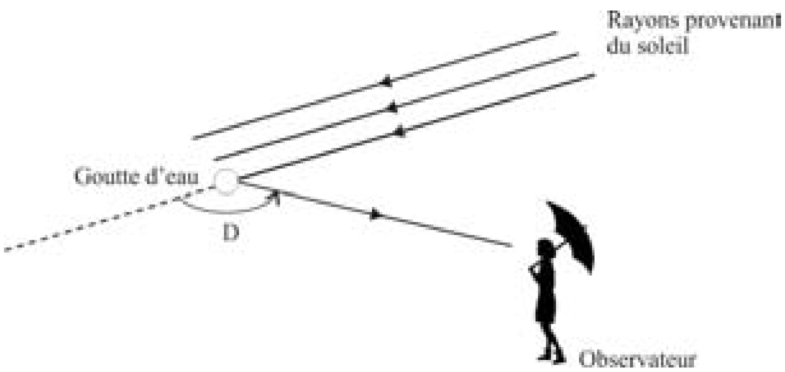
Il en résulte que i_m vérifie : $\frac{\cos i_m}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_m}} = \frac{1}{2}$,

Donc : $\cos i_m^2 = \frac{n^2 - 1}{3}$

EP.3.10. : Arc en ciel

On considère une goutte d'eau de forme sphérique dans l'atmosphère. Cette goutte est éclairée par le Soleil supposé ponctuel.

Un rayon lumineux pénétrant dans la goutte sous l'incidence i subit deux réfractions et un nombre N de réflexions internes pour ressortir de la goutte. Soit D_N la déviation totale du rayon.



1.1. Représenter la marche d'un rayon lumineux ayant subi dans la goutte une seule réflexion interne (N=1) et exprimer la déviation D_1 en fonction des angles d'incidence i et de réfraction r.

1.2. Exprimer la déviation D_N en fonction de i , r et N.

1.3. Montrer que lorsque i varie de zéro à π/2, la déviation D_N ne peut avoir d'extremum que si $N \geq 1$ et que dans ce cas, l'extremum est unique et correspond à un minimum. On notera D_N^m la valeur de cet extremum et i_N^m l'angle d'incidence correspondant.

1.4. Calculer D_N^m et i_N^m pour N=1 sachant que n=1,33.

2.1. On se limite au cas N = 1 (une seule réflexion interne) et on admet que les gouttes d'eau sont uniformément réparties dans l'espace. Les rayons ayant une incidence i_N voisine de la valeur i_N^m subissent une déviation pratiquement égale à D_N^m. En conséquence, dans la direction de cet extremum, il y aura accumulation de lumière.

En déduire la répartition géométrique des gouttes qui apparaissent brillantes à un observateur.

2.2. Sachant que l'indice n de la goutte d'eau est une fonction décroissante de la longueur d'onde, calculer la dérivée de D_m par rapport à n et en déduire ΔD_m la variation de la déviation minimale entre les rayons bleu et rouge.

On donne : n (λ_{Bleu} = 0. 4 µm) = 1,335 et n (λ_{Rouge} = 0. 8 µm) = 1,325

2.3. Expliquer le phénomène de l'arc-en-ciel.

Solution

1.1. Pour N=1, $D_1 = 2\,i + \pi - 4\,r$ avec $\sin i = n \sin r$.

1.2. Pour N quelconque , on a

$$D_N = 2\,(i - r) + N(\pi - 2\,r) = 2\,i + N\,\pi - 2(\,N+1)\,r$$

1.3. $\dfrac{dD_N}{di} = 2 - 2(N+1)\dfrac{dr}{di}$ or $\cos i\, di = n \cos r\, dr$.

On a donc $\dfrac{dr}{di} = \dfrac{1}{n}\dfrac{\cos i}{\cos r}$ et par suite $\dfrac{dD_N}{di} = 2 - \dfrac{2(N+1)}{n}\dfrac{\cos i}{\cos r}$.

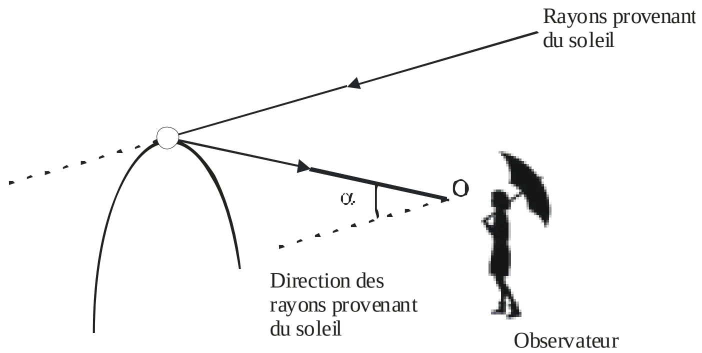
L'extremum vérifie donc la relation $n \cos r_m = (1+N) \cos i_m$. Il s'ensuit que l'on a $\cos^2 i_m = \dfrac{n^2 - 1}{(N+1)^2 - 1}$ .Pour un N donné supérieur ou égal à 1, l'extremum est unique et on peut montrer qu'il s'agit d'un minimum en montrant que la dérivée seconde de D_N est positive pour $i = i_m$.

1.4. Pour N=1, $\cos i_m = \sqrt{\dfrac{n^2 - 1}{3}}$.

On trouve i_m = 59,6° , r_m = 40,4° , D_m = 137,6°.

2.1. Les rayons correspondant à un même angle de Déviation D font le même angle $\alpha = \pi - D$ par rapport à la direction des rayons provenant du Soleil. Ils se situent donc sur un cône d'angle au sommet α et ayant comme axe de révolution la droite parallèle aux rayons provenant du Soleil et passant par l'observateur O. Ainsi, les rayons correspondant à une même déviation D se répartissent sur un arc de cercle.

Sachant qu'il y a accumulation de lumière au voisinage de D_m, l'arc de cercle qui sera visible pour l'observateur en O sera celui correspondant à α voisin de $\alpha_m = \pi - D_m$.



2.2. La déviation D dépend de deux variables n et i, sa dérivée s'écrit :

$$\frac{dD}{dn}(i,n) = \frac{\partial D}{\partial i}\frac{di}{dn} + \frac{\partial D}{\partial n}.$$

Au minimum de déviation, on a $\left(\frac{\partial D}{\partial i}\right)_{i=im} = 0$ et par suite

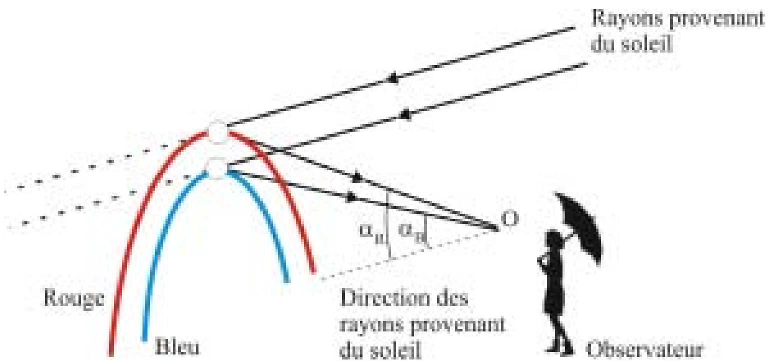
$$\frac{dD_m}{dn}(i_m,n) = \frac{\partial D_m}{\partial n}(i_m,n).$$

D'où $\quad dD_m = -4\left(\frac{dr}{dn}\right)_{i=im} dn = \frac{4\,\mathrm{tg}\,r_m}{n}\,dn$

On trouve donc $\quad \Delta D_m = \frac{4\,\mathrm{tg}\,r_m}{n}\,\Delta n.$

Or, $\Delta n = 0{,}01$, ce qui donne $\quad \Delta D_m = 1{,}5°$.

2.3. L'indice n augmente quand on passe du rouge vers le bleu. Par conséquent, la déviation D_m augmente quand on passe du rouge vers le bleu. Ce qui revient à dire que l'angle α **diminue** quand on passe du rouge vers le bleu. La lumière venant du Soleil étant polychromatique, l'observateur va donc voir dans le ciel différents arcs de cercle correspondant à chaque longueur d'onde tels que l'angle $\alpha_{Bleu} < \alpha_{Rouge}$. Ainsi, l'arc bleu sera à l'intérieur et le rouge sera à l'extérieur.



Il est à noter qu'il existe un second arc-en-ciel (moins visible que le premier) correspondant aux rayons ayant subi deux réflexions à l'intérieur de la goutte d'eau. Dans ce cas le sens de variation de la déviation D_m en fonction de la longueur d'onde est inversé et les couleurs de l'arc-en-ciel aussi.

EP. 3.11 : Fibre optique

1. Fibre à saut d'indice

On considère une fibre optique, à symétrie cylindrique, constituée d'un milieu transparent d'indice n_c entouré par une enveloppe composée par un matériau d'indice n_g tel que $n_g < n_c$.

Un faisceau laser est envoyé sur la face d'entrée de la fibre (face qui baigne dans l'air).

On appelle " angle d'acceptance" de la fibre, l'angle d'incidence θ_{max} en deçà duquel le faisceau reste confiner dans la fibre.

On définit l'ouverture numérique ON de la fibre par θ_{max} = arc sin (ON)

1.1. Sachant que n_c est très proche de n_g, montrer que l'on peut écrire en première approximation $ON \approx n_c \sqrt{2\Delta}$ où $\Delta = \dfrac{n_c - n_g}{n_c}$ est la différence d'indices relative.

Déterminer l'angle d'acceptance θ_{max} de la fibre.

Application numérique : $n_c = 1{,}46$ et $\Delta = 0{,}01$

1.2.On considère deux rayons lumineux entrant au même instant dans la fibre de longueur L, l'un R_0 avec un angle d'acceptance nul et l'autre R_1 avec l'angle d'acceptance maximal.

Montrer que le retard Δt que subit le rayon R_1 par rapport au rayon R_0 à la sortie de la fibre s'exprime par :

$$\Delta t = \frac{L}{c / n_c}\Delta$$

où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide.

$\frac{\Delta t}{2}$ **est appelé temps de réponse d'une fibre à saut d'indice multimode.**

1.3. On définit l'affaiblissement dans une fibre optique par :

$$\alpha = -\frac{1}{L}10\log\left[\frac{P(L)}{P(0)}\right]$$

qui s'exprime en décibel/km (dB/Km) où P(L) et P(0) sont les puissances optiques en z = L et z = 0 respectivement.

Quelle doit être la puissance injectée à l'entrée d'une fibre de 1 Km de longueur pour récupérer une puissance de 0,1 mW à la sortie ?

On donne α = 2 dB/Km à λ = 0,87 µm.

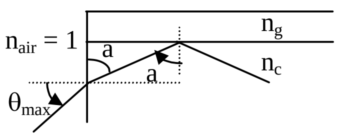
2. Fibre à gradient d'indice

Pour pallier à l'inconvénient de la question précédente, on utilise des fibres dites à « gradient d'indice » qui présentent une variation continue de l'indice n en fonction de la distance r à l'axe de la fibre.

2.1. Représenter l'allure d'un rayon guidé par cette fibre.

2.2. Justifier l'amélioration apportée par la fibre à gradient d'indice en montrant qualitativement que la différence de trajet entre un rayon axial ($\theta = 0$) et un rayon non axial ($\theta \neq 0$) conduit à un retard plus faible que dans la fibre à saut d'indice.

Solution



1.1. Si a est l'angle critique d'incidence entre les deux milieux n_c et n_g , on peut écrire :

$$\sin\theta_{max} = n_c \cos a \qquad \text{avec } \sin a = \frac{n_g}{n_c}$$

soit $$\sin\theta_{max} = n_c\sqrt{1-\sin^2 a} = n_c\sqrt{1-\left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2} = \sqrt{n_c^2-n_g^2}$$

et $$ON = \sqrt{n_c^2-n_g^2} = \sqrt{(n_c-n_g)(n_c+n_g)}$$

Comme n_c est proche de n_g, on a :

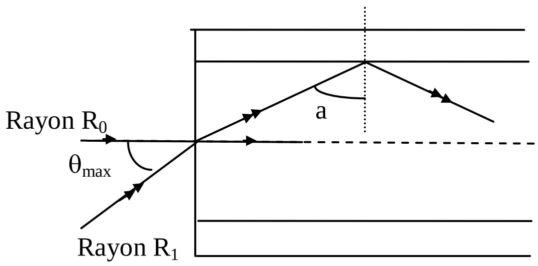
$$ON = \sqrt{2n_c(n_c-n_g)\frac{n_c}{n_c}} = n_c\sqrt{2\frac{n_c-n_g}{n_c}} = n_c\sqrt{2\Delta}$$

Application numérique :

$$\sin\theta_{max} = ON = 0.2$$

soit $$\theta_{max} = 22{,}5°$$

1.2.



D'après cette représentation, lorsque le rayon R_0 parcourt L, le rayon R_1 parcourt une distance plus grande de $\frac{L}{\sin a}$.

Le temps mis par le rayon R_0 est $t_0 = \frac{L}{c/n_c}$

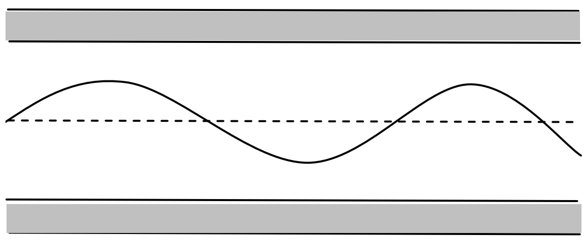
Le temps mis par le rayon R_1 est $t_1 = \frac{L}{\frac{c}{n_c}\sin a} = \frac{n_c}{n_g}\frac{L}{c/n_c}$

D'où $\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{L}{c/n_c}\left(\frac{n_c}{n_g} - 1\right) = \frac{L}{c/n_c}\,\Delta$

1.3. On a : $\alpha = -\frac{1}{L} 10 \log\left[\frac{P(L)}{P(0)}\right]$ d'où $P(0) = P_0 = P(L)\,.\,10^{\alpha L/10}$

soit : $P_0 = 0{,}1\ 10^{0{,}2} = 0{,}158$ mW

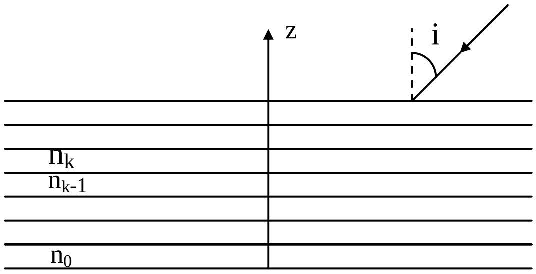
2.1. A cause de l'inhomogénéité du milieu, la trajectoire du rayon lumineux à l'intérieur de la fibre s'incurve petit à petit à l'approche de la gaine jusqu'à atteindre l'angle critique d'incidence ; le rayon lumineux subit alors une réflexion totale qui le fait repartir suivant une trajectoire symétrique. La trajectoire prend finalement une allure de sinusoïde comme le montre la figure ci-dessous.



2.2. La trajectoire d'un rayon non axial dans ce cas s'éloigne moins de l'axe de la fibre que dans une fibre à saut d'indice, ce qui conduit à un trajet plus court, donc à un retard plus faible et à un temps de réponse plus rapide.

EP.3.12. : Réfraction de l'atmosphère

L'atmosphère peut être modélisée par un empilement de couches horizontales parallèles, respectivement caractérisées par un indice n décroissant avec l'altitude. A très haute altitude, l'indice n est considéré égal à $n_\infty = 1$ (lorsque z tend vers l'infini) et au niveau du sol , l'indice est égal à $n_0 = 1,00029$. Il s'agit d'un effet très faible mais qui a des conséquences non négligeables sur des phénomènes tels que l'observation des étoiles.



1. Soit un rayon incident provenant d'une étoile par exemple sous une incidence i lorsque z est très grand .

Soient la k[ème] couche d'indice n_k et la couche suivante d'indice n_{k-1}. Donner la relation entre i_k et i_{k-1}. En déduire la relation entre l'angle i et i_0 l'angle d'incidence au sol. Donner l'allure de la marche du rayon lumineux.

2. Soit $\varepsilon = i - i_0$ la différence entre les angles i et i_0. Donner l'expression de ε en fonction de i_0 et n_0 (on effectuera un développement de Taylor au voisinage de i_0).

Faire l'application numérique pour $i_0 = 10$ °, $i_0 = 20°$, $i_0 = 60$ °, $i_0 = 70°$.

3. Sans faire de calcul, montrer que lors d'une éclipse de Lune, quelques rayons du Soleil peuvent atteindre la Lune.

Solution

1. $n_k \sin i_k = n_{k-1} \sin i_{k-1} = ... = n_1 \sin i_1 = n_0 \sin i_0 = n_\infty \sin i = \sin i$.

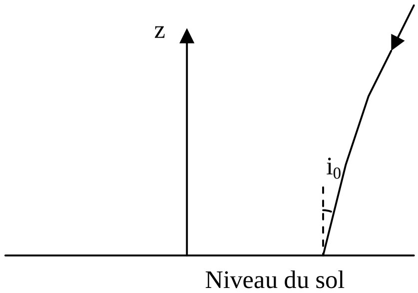
2. $\sin i = \sin(\varepsilon + i_0) = n_0 \sin i_0$.

Par ailleurs, $\sin(\varepsilon + i_0) = \sin i_0 + \varepsilon \cos i_0$.

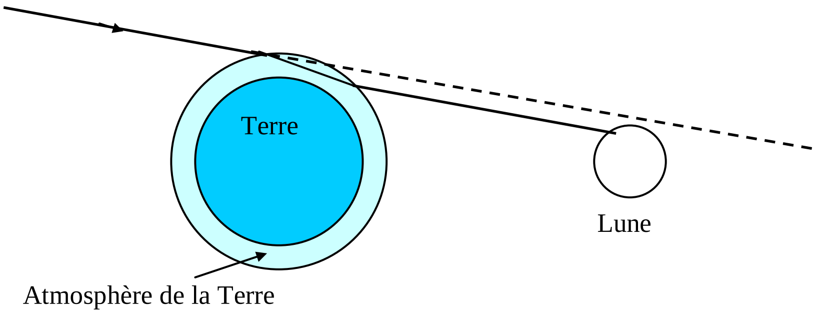
D'où $\varepsilon = (n_0 - 1) \tan i_0$.

Pour $i_0 = 10$ °, ε = 0.003 ° = 10 '' , $i_0 = 20$ °, ε = 0.006 ° = 22 ''

$i_0 = 60°$, ε = 0.029 ° = 103 '' , $i_0 = 70$ °, ε = 0.046 ° = 164 ''

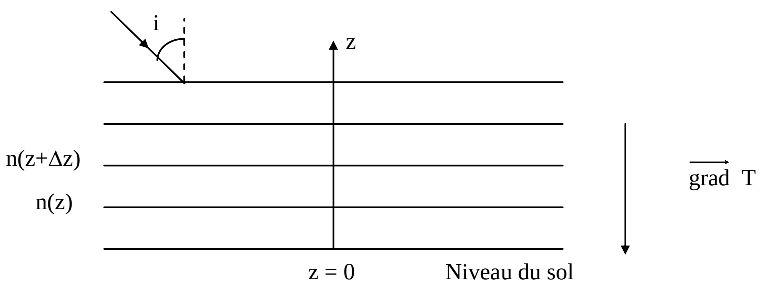


3. En effet, sous l'effet de la réfraction de l'atmosphère, les rayons du Soleil qui la traversent sont légèrement déviés et arrivent sur la Lune. En général, la Lune paraît légèrement rougeâtre car ce sont les longueurs d'onde dans le rouge qui sont majoritaires : les rayons correspondant à la couleur bleue ont été diffusés dans toutes les directions alors que ceux correspondant à la couleur rouge sont essentiellement transmis.



EP.3.13. : Phénomène de mirage

Lorsqu'il fait très chaud, on observe au voisinage immédiat du sol horizontal un important gradient de température : en effet, le sol est plus chaud que l'air. Ceci a pour conséquence une variation importante de l'indice de réfraction.

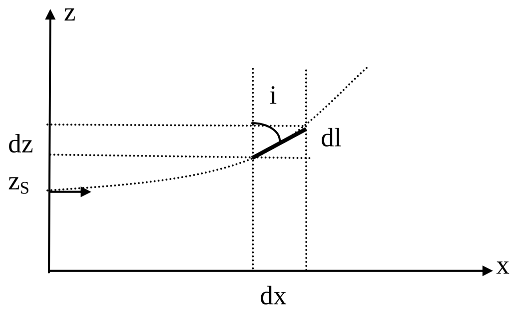


1. En considérant que l'atmosphère est constituée d'une succession de milieux homogènes d'indice variant d'un milieu à l'autre, montrer que n(z) sin i(z) = constante.

2. Sachant que l'indice de l'air est lié à la masse volumique ρ par la relation de Gladstone n - 1 = k ρ où k est une constante positive et que l'air peut être considéré comme un gaz parfait , donner le sens de variation de l'indice en fonction de z.

3. Donner la marche d'un rayon lumineux provenant du ciel. Expliquer le phénomène des mirages.

4. **On se propose de trouver la loi de variation n(z) de l'indice en fonction de l'altitude z. Considérons une source lumineuse S située à l'altitude z_S émettant un rayon lumineux vers les x positifs perpendiculairement au plan yOz et suivant une trajectoire z = f(x) comme le montre la figure.**



Montrer que pour une position élémentaire dl du rayon lumineux, de composantes dx sur Ox et dz sur Oz, on a la relation :

$$n(z_S) = \frac{n(z)}{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{1/2}}$$

5. Au voisinage du sol, l'indice de l'air varie suivant la loi n(z) = $n_0 + \alpha$ z où n_0 est l'indice au niveau du sol et α une constante positive. Dans la suite du problème, on s'intéressera aux faibles altitudes z, inférieures à 10 cm, et on prendra pour valeurs numériques : n_0 = 1,000250, $\alpha = 4.10^{-4}$ m^{-1}.

Au vu des valeurs numériques données ci-dessus, justifier tout d'abord que la valeur numérique du rapport $\frac{dz}{dx}$ est très inférieure à 1 et donner la nouvelle relation liant $\frac{n(z_S)}{n(z)}$ et $\frac{dz}{dx}$.

6. En déduire que l'équation de la trajectoire du rayon lumineux dans la zone à gradient d'indice est assimilable à un arc de parabole d'équation :

$$z = z_S + \frac{\alpha}{2n_0}x^2$$

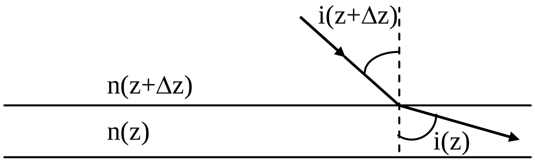
7. On se place dans la situation où z_S = 0,4 m et on suppose que la température de l'air est uniforme au delà d'une hauteur de z_m = 0,5 m du sol. Un observateur dont l'œil est à une hauteur H = 1,8 m au dessus du sol voit devant lui un reflet du ciel semblant provenir du sol. A quelle distance d peut-il situer ce reflet ?

Solution

1. Considérons deux couches successives d'épaisseur Δz . On a d'après la loi de la réfraction sur le dioptre séparant les deux couches successives :

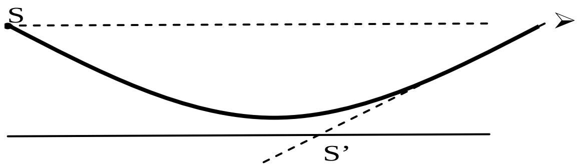
n(z) sin i(z) = n(z+Δz) sin (z + Δz) = n(z') sin(z')

On a bien n(z) sin i(z) = constante.

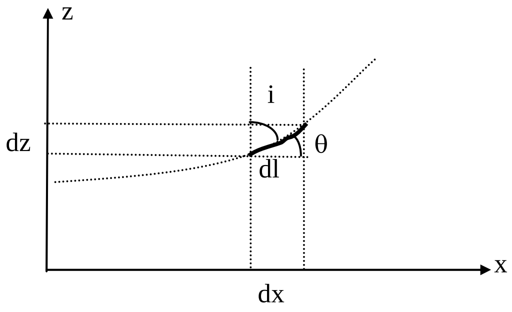


2. L'air étant un gaz parfait, on a, pour une mole PV= RT et $\rho = \frac{M}{V}$ où M est la masse molaire, P la pression, V le volume, R la constante des gaz parfait et T la température. D'où, $n(z) - 1 = k \frac{M P}{R T(z)}$. Sachant que la température T(z) est une fonction décroissante de z, l'indice n(z) est une fonction croissante de z. L'indice n(z) diminue donc quand on s'approche du sol.

3. Un rayon assez incliné provenant du ciel s'incurve petit à petit à proximité du sol car i(z) augmente à mesure que z diminue puisque n(z) sin i(z) = constante. Si i(z) atteint l'angle critique d'incidence λ, le rayon lumineux subit une réflexion totale et suit un chemin symétrique. Ainsi, un observateur qui regarde la couche d'air au dessus du sol peut recevoir des rayons en provenance du ciel, ce qui lui donne l'illusion de voir un reflet du ciel et peut croire à la présence d'une surface d'eau d'où l'effet mirage.



Un rayon provenant de S semble pour l'observateur provenir de S'.



On a :

$n(z_S) = n(z) \sin i$

$= n(z) \cos\theta$

avec $\quad \text{tg}\,\theta = \dfrac{dz}{dx} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{1}{\left[1+\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$

donc $\quad n(z_S) = \dfrac{n(z)}{\left[1+\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$

5. $n(z)\ n_0 + \alpha\, z$ avec $n_0 = 1{,}00025$ et $\alpha = 4.10^{-4}\ m^{-1}$

A $z = 10$ cm $= 10^{-1}$ m, on a : $n(z) = 1{,}00030$

La variation de n(z) est très faible ($\Delta n \approx 5.10^{-5}$) $\Rightarrow \dfrac{dz}{dx}$ petit $\Rightarrow$ le rayon lumineux a une très faible courbure

$$\frac{1}{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

On a donc une nouvelle relation :

$$\frac{n(z_S)}{n(z)} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

6. $$\frac{n(z_S)}{n(z)} = \frac{n_0 + \alpha\, z_S}{n_0 + \alpha\, z} = \frac{1+\dfrac{\alpha}{n_0} z_S}{1+\dfrac{\alpha}{n_0} z}$$

$$\frac{n(z_S)}{n(z)} \approx \left(1+\frac{\alpha}{n_0}z_S\right)\left(1-\frac{\alpha}{n_0}z\right) \approx 1+\frac{\alpha}{n_0}z_S-\frac{\alpha}{n_0}z$$

$$\approx 1+\frac{\alpha}{n_0}(z_S-z)$$

Or $$\frac{n(z_S)}{n(z)} \approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

$\Rightarrow$ $$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{2\alpha}{n_0}(z-z_S)$$

En dérivant par rapport à x, on obtient :

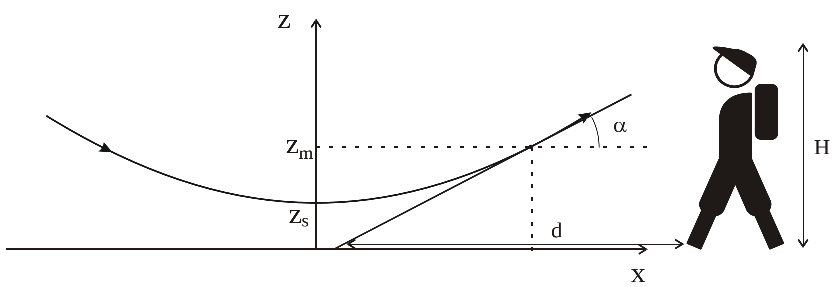
$$2\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{2\alpha}{n_0}\frac{dz}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\alpha}{n_0}$$

Comme $\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0} = 0$ et $z(0) = z_S$ on a :

$$\mathbf{z(x) = \frac{\alpha}{2n_0}x^2 + z_S}$$

Dans la région d'indice variable, le rayon lumineux décrit un **arc de parabole**.

7. Pour une hauteur supérieure à 0,5 m (z > 0,5 m), la trajectoire du rayon devient rectiligne et le rayon fait un angle θ avec l'horizontal vérifiant $\text{tg}\,\theta = \left.\frac{dz}{dx}\right|_{z_0 = 0,5}$.



Par ailleurs, $\text{tg}\,\theta = \frac{H}{d}$.

Sachant que $z_m = z_S + \frac{\alpha}{2n_0}x_m^2$, on a $x_m = \sqrt{(z_m - z_S)\frac{2n_0}{\alpha}}$ et

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\alpha x_m}{n_0} = \sqrt{(z_m - z_S)\frac{2\alpha}{n_0}} .$$

On trouve alors que $d = H\sqrt{\frac{n_0}{2\alpha\,(z_m - z_S)}}$ = 202 m.

CHAPITRE 4

SYSTEMES OPTIQUES ET IMAGES

Un système optique est constitué d'un ensemble de surfaces, en général de révolution (systèmes centrés), qui séparent (sauf s'il s'agit de miroirs) des milieux transparents le plus souvent homogènes et isotropes d'indices de réfraction variés. Ce système permet d'obtenir d'un objet lumineux, par lui-même ou convenablement éclairé, une "image" pouvant être réelle ou virtuelle.

Lorsqu'un système optique donne une image nette et semblable à l'objet on dit que ce système réalise un stigmatisme parfait. On verra, qu'à part le miroir plan, les systèmes réels provoquent une déformation de l'image qu'on appelle "aberration". Ces aberrations sont dues à de nombreux effets tels que la diffraction, la déformation des ondes lumineuses initialement sphériques, la variation de l'indice de réfraction avec la longueur d'onde (aberrations chromatiques), … . On indiquera alors dans ce cas les conditions de stigmatisme rigoureux exigées pour avoir une netteté parfaite et celles qui permettent un stigmatisme approché et donc une image acceptable.

L'application du principe de Fermat permet un énoncé intéressant de la condition de stigmatisme et autorise alors l'utilisation à bon escient de chaque système dans les conditions les mieux adaptées à son fonctionnement.

1. Systèmes optiques

1.1.Définition

Les systèmes optiques sont des successions de milieux transparents séparés par des dioptres ou par des surfaces réfléchissantes.

Le plus souvent, les surfaces séparant les différents milieux présentent une symétrie de révolution autour d'un axe.

1.2. Systèmes centrés

Un système centré est un système optique formé par une succession de surfaces réfringentes ou réfléchissantes séparant des milieux transparents tel que l'ensemble présente un axe de symétrie de révolution.

Cet axe de symétrie est appelé " ***axe optique*** " du système. Il est orienté dans le sens de propagation de la lumière avant la traversée du système. Les centres de toutes les surfaces sont alignés sur cet axe et la symétrie impose que les surfaces planes soient disposées perpendiculairement à cet axe.

Les intersections des différentes surfaces avec l'axe optique sont appelées "sommets" de ces surfaces.

L'axe optique étant perpendiculaire à toutes les surfaces, tout rayon suivant l'axe optique n'est pas dévié.

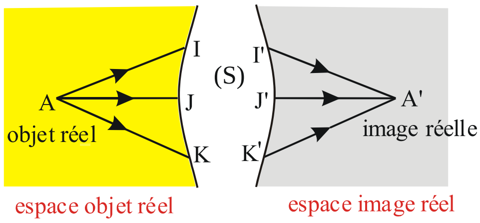
2. Images données par un système optique

Soit un système optique (S).

On dit qu'un point A' est l'image d'un point A à travers (S) - ou que A et A' sont conjugués à travers (S) - si **à tous les rayons incidents** dont les supports passent par A, correspondent des rayons **émergents dont les supports passent tous** par A'.

2.1. Objets, images et espaces réels

Lorsque les rayons incidents passent effectivement par A, on dit que A est un objet réel.



On remarquera que, dans le cas d'un point objet réel A, les chemins optiques [AI], [AJ] et [AK] ont des valeurs algébriques positives puisque les sens de parcours de A vers les différents points d'incidence (I, J, K) sur la face d'entrée du système optique (S) s'effectuent dans le sens de la lumière.

Lorsque les **rayons émergents passent effectivement par A'**, on dit que A' est une image réelle.

Dans ce cas également, les chemins optiques [I'A'], [J'A'] et [K'A'] ont des valeurs algébriques positives.

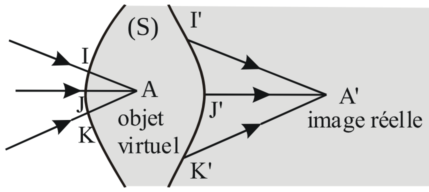
On dira donc que des points objet ou image sont **réels** si les **chemins optiques** qui partent ou aboutissent à ces points ont des **valeurs algébriques positives**.

L'*espace objet réel* comprend tous les points situés *en avant de la face d'entrée* du système (S) : un objet se trouvant dans cet espace est donc réel.

L'espace image réel est la région de l'espace située *après la face de sortie* de (S) : une image se formant dans cet espace est donc réelle.

2.2. Objets, images et espaces virtuels

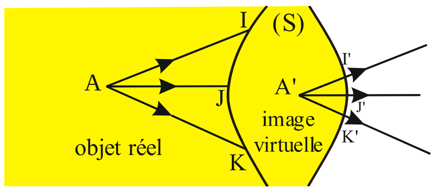
On dit que **A est un objet virtuel** pour le système (S) si ce sont les **prolongements des rayons incidents** qui passent par A.



espace objet virtuel

On notera que les chemins optiques [AI], [AJ] et [AK] ont des valeurs algébriques négatives puisque les sens de parcours de A vers les différents points d'incidence (I, J, K) sur la face d'entrée du système optique (S) s'effectuent dans le **sens inverse de la lumière.**

Tous les points ***situés après la face d'entrée*** de (S) appartiennent à l'***espace objet virtuel* :** un objet se trouvant dans cet espace est donc virtuel.



espace image virtuel

Si seuls les **prolongements des rayons émergents se coupent en A'**, alors **A' est une image virtuelle** donnée par (S). Les chemins optiques [I'A'], [J'A'] et [K'A'] ont des valeurs algébriques négatives.

On dira donc que des points objet ou image sont **virtuels** si les **chemins optiques** qui partent ou aboutissent à ces points ont des **valeurs algébriques négatives**.

L'***espace image virtuel*** contient tous les points ***situés avant la face de sortie*** de (S) :. une image se trouvant dans cet espace est donc virtuelle.

3. Notions de stigmatisme

3.1. Stigmatisme rigoureux

3.1.1. Définition

Un système optique (S) est dit stigmatique pour un couple de points A et A' si tout rayon passant par A avant la traversée de (S), sort du système en passant par A'. On dit également que (S) donne de l'**objet ponctuel A** une **image ponctuelle A'**.

Un système peut être stigmatique pour un seul couple de points ou pour un ensemble de couples de points.

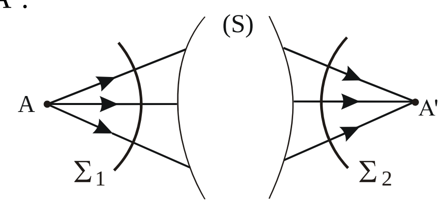
3.1.2. Condition de stigmatisme rigoureux

Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système optique (S) soit rigoureusement stigmatique pour un couple de points A et A'.

Supposons des rayons lumineux émis, dans le premier milieu par une source ponctuelle A; les surfaces d'onde Σ_1 dans ce milieu sont alors des sphères de centre A.

Si tous les rayons dans le dernier milieu passent par un même point A', les surfaces d'onde dans le dernier milieu sont également des sphères Σ_2 de centre A'.

L'égalité des chemins optiques [Σ_1 Σ_2] entre Σ_1 et Σ_2 peut se traduire par l'égalité des chemins optiques [AA'] entre A et A' pour tous les rayons issus de A et arrivant en A'.



La condition de stigmatisme rigoureux pour un couple de points A et A' s'écrit donc :

$$[AA'] = \text{constante}$$

3.1.3. Surfaces rigoureusement stigmatiques pour un couple de points

3.1.3.1.- Stigmatisme par réflexion

Soit I le point d'incidence et n l'indice du milieu où se trouvent l'objet A et l'image A'. On a :

$$\mathbf{n(\overline{AI}+\overline{IA'})\ = constante} \quad \text{ou} \quad \mathbf{\overline{AI}+\overline{IA'}\ = constante}$$

où $\overline{AI}$ et $\overline{IA'}$ sont mesurés positivement dans le sens de la lumière.

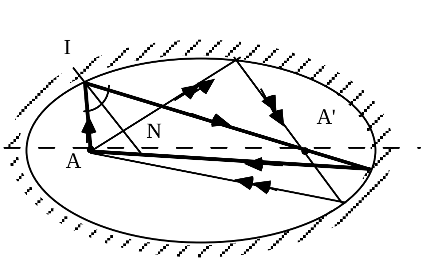
Deux cas se présentent :

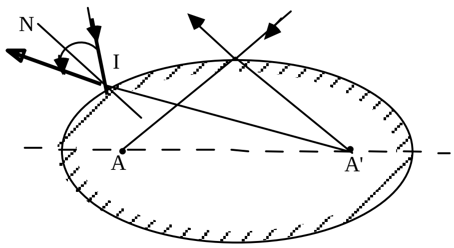
1. A et A' sont de même nature (tous deux réels ou tous deux virtuels)

Dans ce cas; les valeurs algébriques de $\overline{AI}$ et $\overline{IA'}$ sont de même signe et la condition de stigmatisme s'écrit :

AI + IA’ = constante

La surface réfléchissante est donc un **ellipsoïde de révolution** de foyers A et A'. De plus, on remarquera que la normale en un point quelconque de l'ellipse, trace dans le plan d'incidence de l'ellipsoïde, est la bissectrice de l'angle obtenu en joignant ce point aux deux foyers :



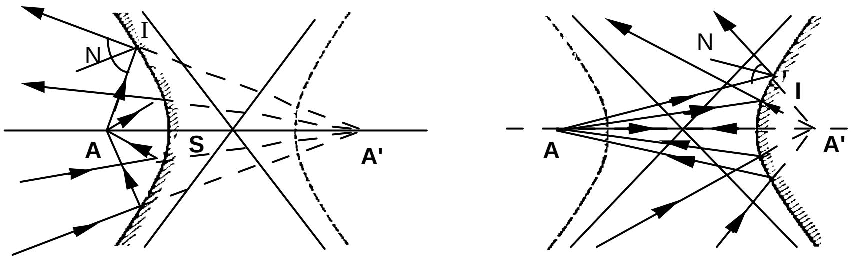


2. A et A' sont de natures différentes (l'un réel et l'autre virtuel)

Les valeurs algébriques de $\overline{AI}$ et $\overline{IA'}$ sont de signes contraires et la condition de stigmatisme devient :

AI - IA’ = constante

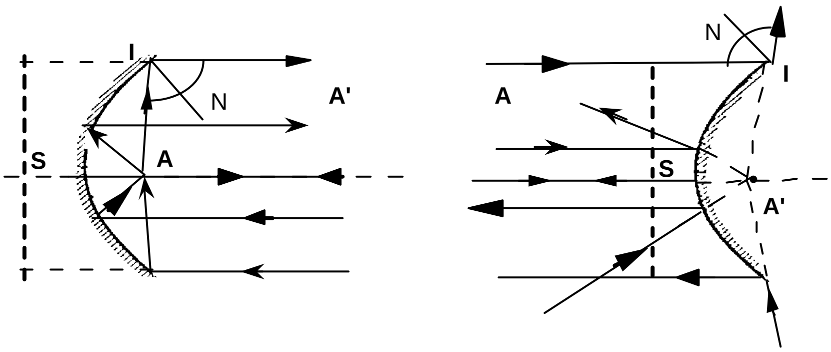
La surface réfléchissante est une nappe d'**hyperboloïde de révolution** de foyers A et A'.



Cas particuliers importants

• Si **AI - IA' = 0** , ou autrement dit si la constante est nulle, I est dans le plan médiateur de AA' et la surface réfléchissante est un **miroir plan** . A tout point A on peut faire correspondre son symétrique A' par rapport au miroir.

• Si l'un des points **A ou A' s'éloigne indéfiniment**, la surface réfléchissante stigmatique devient un **paraboloïde de révolution** de foyer A' ou A et d'axe AA'.



La propriété des miroirs paraboliques d'être stigmatiques pour un point objet à l'infini, quelle que soit la fréquence de l'onde électromagnétique utilisée, explique leur emploi dans les télescopes ou les antennes de télévision.

3.1.3.2.- Stigmatisme par réfraction

Soit un système optique constitué par un dioptre séparant deux milieux homogènes d'indices n et n'. Le même raisonnement que précédemment nous conduit à la condition

$$\mathbf{n\,AI \pm n'\,IA' = constante}$$

avec les mêmes conventions de signe.

Cette condition définit une famille de courbes qui délimitent en général des surfaces du quatrième degré appelées "***ovales de Descartes*** ".

Il existe des cas particuliers où les surfaces sont du deuxième degré. C'est le cas où la constante est nulle , A et A' sont alors de natures différentes :

$$nAI - n'IA' = 0$$

La surface stigmatique par réfraction est une ***sphère*** et les points A et A' sont appelés **points de Weierstrass** du dioptre sphérique. Nous y reviendrons.

3.2. Stigmatisme approché

A part de rares exceptions, les rayons issus d'un point A ne se recoupent pas tous en un point A' mais dans une région de l'espace aux alentours du point A'. L'image d'un point A est alors une tâche d'une certaine dimension et le problème se posera alors en ces termes :

- à partir de quelles dimensions de la tache A' peut-on considérer que l'on obtient, avec une bonne approximation, une image de A ?
- quelles conditions doit-on satisfaire pour obtenir une image "acceptable" ?

La réponse à la première question nous est fournie par le dispositif récepteur de l'image. Dans le cas d'un récepteur photographique, une tache sera considérée comme ponctuelle si ses dimensions sont inférieures au grain de l'émulsion. Dans le cas de l'œil, c'est le pouvoir de résolution de celui-ci qui détermine la limite acceptable.

La réponse à la deuxième question est donnée par les conditions d’approximation de Gauss qui s’appliquent aux systèmes centrés.

4. Conditions de stigmatisme approché. Approximation de Gauss

4.1. Points sur l'axe

Un système centré est approximativement stigmatique pour les points de l'axe :

- si l'on ne considère que des rayons faisant un petit angle avec l'axe c'est-à-dire des rayons para axiaux.
- si les angles d'incidence des rayons sur les différents dioptres du système sont faibles de sorte que l'on puisse écrire la loi de la réfraction sous la forme :

$$\mathbf{n_1 i_1 \approx n_2 i_2}$$

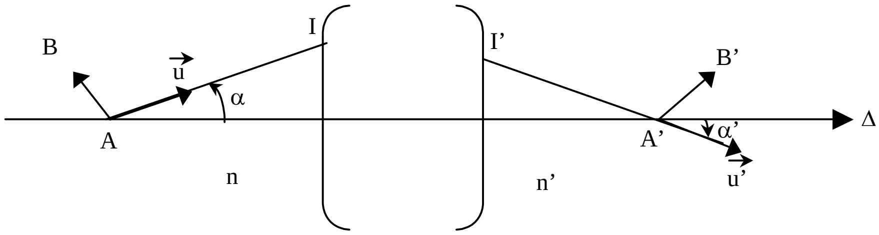
Ces conditions sont appelées "conditions de stigmatisme approché de Gauss "

Ceci suppose que la partie utile des dioptres ou des miroirs est restreinte à la région voisine de l'axe optique.

4.2. Points en dehors de l'axe. Aplanétisme

Considérons un système centré stigmatique pour un couple de points A et A' de l'axe. Le chemin optique [AA'] est constant et indépendant de la direction $\vec{u}$ du rayon incident et de la direction de $\vec{u'}$ du rayon émergent, donc de tout déplacement des points d'incidence et d'émergence I et I' des rayons sur le système.

On a : [AA'] = constante pour $\forall$ I, I'



Le système sera également stigmatique pour le couple de points B et B', proches de A et A', s'il en est de même pour le chemin optique [BB'] :

[BB'] = constante quel que soit I, I'

B et B' étant proches de A et A', on peut écrire :

$$[BB'] = [AA'] + d\,[AA']$$

$$[BB'] = [AA'] + d\,(n\,\vec{u}.\overrightarrow{AI}) + d\,(n'\vec{u'}.\overrightarrow{I'A'})$$

Or : $d\vec{u} \perp \vec{u}$, $d\vec{u'} \perp \vec{u'}$

et $d\overrightarrow{AI} = d\overrightarrow{AO} + d\overrightarrow{OI} = -d\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AB}$

$$d\overrightarrow{I'A'} = d\overrightarrow{I'O} + d\overrightarrow{OA'} = d\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{A'B'}$$

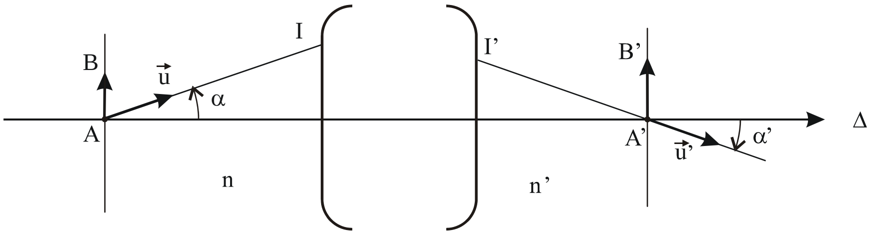
Donc, [BB'] = constante si l'on a :

$$-\ n\,\vec{u}.d\overrightarrow{OA} + n'\vec{u'}.d\overrightarrow{OA'} = \text{constante}$$

Le système sera donc stigmatique pour le couple de points B et B' si l'on a la relation :

$$-\ n\,\vec{u}.\overrightarrow{AB} + n'\vec{u'}.\overrightarrow{A'B'} = \text{constante}$$

En particulier, cette relation est vraie pour un objet $\overrightarrow{AB}$ et une image $\overrightarrow{A'B'}$ situées dans des plans de front perpendiculaires à l'axe optique Δ.



Evaluons alors la constante pour le rayon particulier confondu avec l'axe optique :

On a : $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}' \perp \overrightarrow{A'B'}$ $\Rightarrow$ constante = 0

La relation exprimant le stigmatisme du système pour le couple de points B et B' s'écrit alors, en fonction des angles α et α' des rayons incident AI et émergent I'A' avec l'axe optique :

$$\mathbf{-\,n\ \overline{AB}\ \sin\alpha\ +\ n'\ \overline{A'B'}\ \sin\alpha'\ =\ 0} \quad \text{pour tout } \alpha$$

ou encore : $$\mathbf{n\ \overline{AB}\ \sin\alpha\ =\ n'\ \overline{A'B'}\ \sin\alpha'}$$

Cette relation est appelée " ***relation d'Abbe*** "

Tout système qui vérifie cette relation pour des objets situés dans un plan de front perpendiculaire à l'axe est dit "*aplanétique* ".

Pour des rayons para axiaux, les angles α et α' sont faibles et la relation précédente s'écrit :

$$\mathbf{n\ \overline{AB}\ \alpha\ =\ n'\ \overline{A'B'}\ \alpha'}$$

qui représente la **"relation de Lagrange-Helmhotz** ".

Le système est approximativement stigmatique pour les points voisins de l'axe et qui donnent donc des rayons des rayons peu inclinés sur l'axe.

Finalement, au lieu de parler de points conjugués, on peut parler de petites portions de plans conjugués perpendiculaires à l'axe, en se limitant aux points de ces plans proches de l'axe. On dit qu'on a alors correspondance de plan à plan.

En conclusion, les conditions de stigmatisme approché ou "**conditions de l'approximation de Gauss** " s'intéressent aux **rayons para axiaux** c'est-à-dire aux rayons peu inclinés sur l'axe optique des systèmes, ce qui limite, d'une part, la portion utile des systèmes optiques à leurs parties centrales et, d'autre part, la grandeur algébrique des objets étudiés.

Nous verrons par la suite l'application de ces notions générales lorsque nous étudierons les différents systèmes optiques.

5. Propriétés des systèmes centrés

5.1. Relation de conjugaison

Le système donne, d'un point objet A sur l'axe, une image A' également sur l'axe. La position de A' dépend de celle de A. Il existe donc une relation mathématique qui relie les positions de A et A'. Cette relation est dite " relation de conjugaison ".

5. 2.- Grandissement

5.2.1. Grandissement linéaire transversal γ

Le grandissement linéaire transversal γ définit le rapport des valeurs algébriques des dimensions linéaires de l'image A'B' à celles de l'objet AB :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

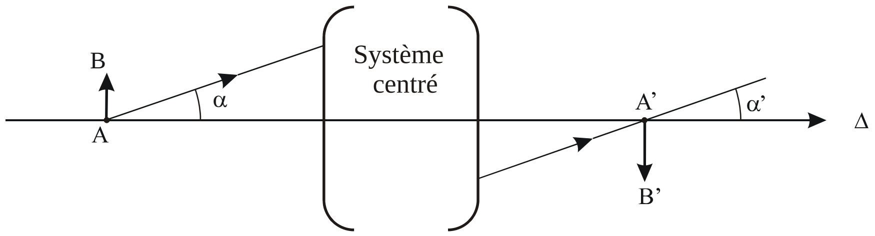
γ est une valeur algébrique sans dimension, positive si l'image et l'objet ont même sens, négative si l'image est renversée par rapport à l'objet.

5.2.2. Grandissement angulaire G

On appelle grandissement angulaire G le rapport algébrique des angles d'émergence α' et d'incidence α :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

les angles α et α' étant comptés positivement dans le sens direct.



5.2.3. Relation entre G et γ

Un système centré aplanétique et utilisé dans les conditions de stigmatisme approché de Gauss, vérifie la relation de Lagrange-Helmhotz $n\,\overline{AB}\,\alpha = n'\,\overline{A'B'}\,\alpha'$, qui peut encore s'écrire :

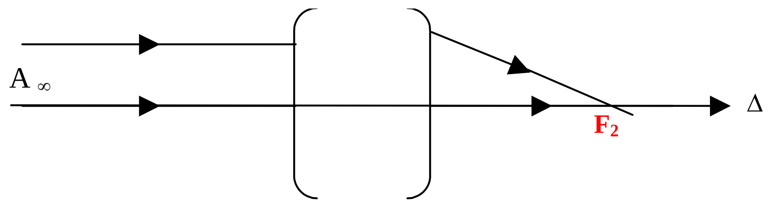
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n}{n'}\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{n}{n'}\frac{1}{G} = \gamma$$

soit : $$\boldsymbol{\gamma\, G = \frac{n}{n'}}$$

5.3. Principaux éléments d'un système centré

Ce sont les éléments qui caractérisent un système centré.

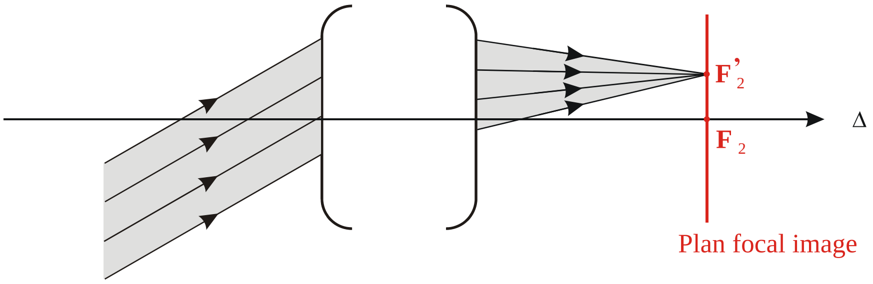
5.3.1. Foyer image



Un rayon issu d'un point objet à l'infini sur l'axe, parallèle donc à l'axe, émerge du système en passant par un point F_2 de l'axe. L'axe optique représentant un rayon particulier issu du même objet, le point F_2 est l'image de l'objet A_∞ situé à l'infini sur l'axe. Il est appelé " foyer principal image ". Le terme principal est très souvent omis et on désigne F_2 par simplement " foyer image ".

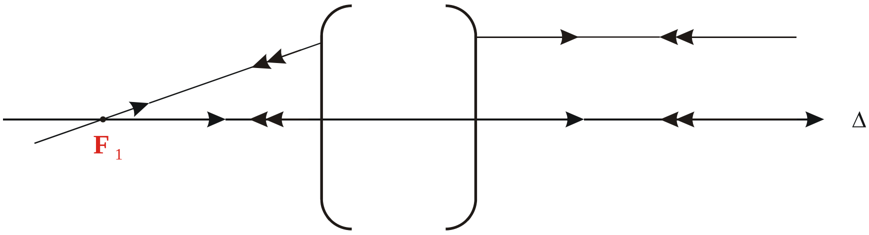
5.3.2. Plan focal image

Le système étant aplanétique, l'image F_2' de tout point objet à l'infini, non nécessairement dans la direction de l'axe, est située dans un plan perpendiculaire à l'axe et passant par F_2.



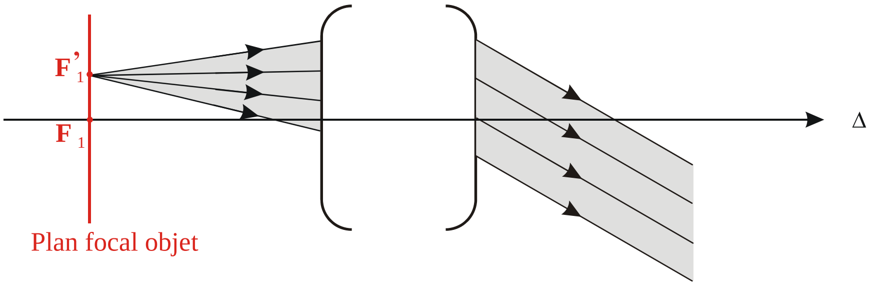
Ce plan constitue le " plan focal image " et le point F_2' est appelé " *foyer image secondaire* ".

5.3.3. Foyer objet



Soit un rayon issu d'un point à l'infini dans la direction de l'axe et provenant de " l'espace image ". Il coupe en émergeant du système, dans "l'espace objet ", l'axe optique en un point F_1 qui représente l'image du point à l'infini sur l'axe. D'après la loi du retour inverse de la lumière, l'image du point objet F_1 est à l'infini sur l'axe. Le point F_1 représente le " foyer objet " du système et tout rayon incident passant par F_1 émerge du système parallèlement à l'axe.

5.3.4. Plan focal objet



Le système étant aplanétique, l'image de tout point situé dans le plan de front contenant F_1 (plan perpendiculaire à l'axe) est à l'infini mais pas dans la direction de l'axe.

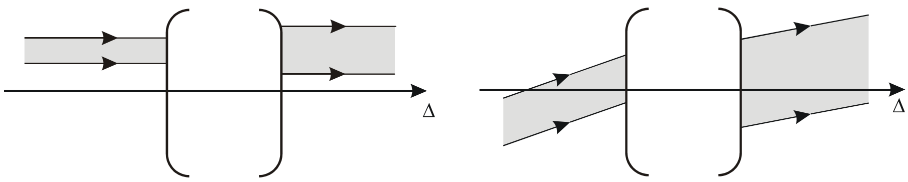
Le plan de front contenant F_1 est appelé " plan focal objet " et les différents points F_1' du plan représentent les " foyers secondaires objet ".

6. Systèmes centrés afocaux

6.1. Définition

Les systèmes centrés ne possèdent pas toujours des foyers situés à distance finie. Il existe des systèmes centrés dont les foyers sont rejetés à l'infini. De tels systèmes sont dits" afocaux " et présentent un grand intérêt pour les instruments d'optique destinés à l'observation d'objets très éloignés comme les astres.

Dans un tel système, tout faisceau incident parallèle à l'axe optique émerge parallèlement à l'axe. De même, tout faisceau incident parallèle à une direction autre que l'axe, donne un faisceau émergent parallèle à une direction différente de l'axe.

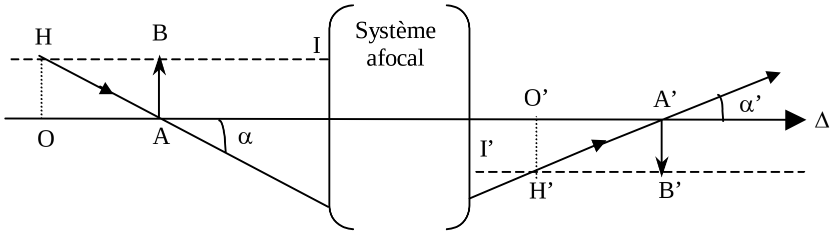


6.2. Propriétés des systèmes afocaux

De tout objet à l'infini, le système afocal donne une image à l'infini.

Tout rayon parallèle à l'axe émerge du système afocal parallèlement à l'axe.

Considérons un objet $\overrightarrow{AB}$ perpendiculaire à l'axe se déplaçant le long de l'axe. Le point B se déplace parallèlement à l'axe, son image B' se déplacera également parallèlement à l'axe. L'image $\overrightarrow{A'B'}$ garde donc une hauteur constante.



Le grandissement linéaire transversal γ est donc constant.

Le système étant aplanétique, ***le grandissement angulaire G est*** également ***constant*** puisque G et γ sont reliés par la relation $\gamma\, G = \frac{n}{n'}$.

6.3. Relation de conjugaison des systèmes afocaux

Soient O,O' et A,A' deux couples de points conjugués sur l'axe, $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{AB}$ deux objets ayant la même dimension et de même sens. Leurs images $\overrightarrow{O'H'}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ auront également même dimension et même sens.

On a : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA}\,\alpha$

$$\overrightarrow{O'H'} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{O'A'}\,\alpha'$$

d'où : $$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\frac{\overline{OA}}{\overline{O'A'}} = \gamma\frac{\overline{OA}}{\overline{O'A'}} = G$$

Or : $$\gamma\, G = \frac{n}{n'}$$

soit: $$\frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}} = \frac{\gamma}{G} = \gamma^2\frac{n'}{n} = \text{constante}$$

donc : $$\mathbf{\overline{O'A'} = \gamma^2\frac{n'}{n}\overline{OA}}$$

Exercices et problèmes

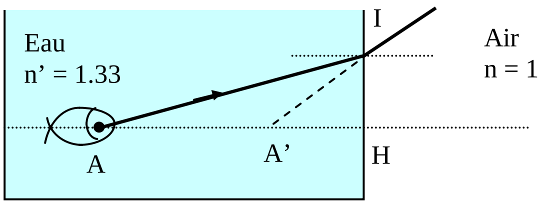
EP.4.1. : Stigmatisme approché d'un dioptre plan

On observe un poisson A nageant dans un bocal rempli d'eau (n' = 1.33)

Un rayon lumineux provenant de A arrive en I sur la paroi verticale du bocal avec un angle d'incidence i et émerge dans l'air (n = 1) avec un angle de réfraction i', semblant provenir d'un point A'. Soit H la projection orthogonale de A sur la paroi qui constitue la surface de séparation du dioptre..

1. Montrer qu'on a la relation $\dfrac{\overline{HA}}{\overline{HA'}} = \dfrac{n \cos i}{n' \cos i'}$.

2. En considérant que i et i' sont petits, trouver la nouvelle relation entre $\overline{HA}$ **et** $\overline{HA'}$**. Expliquer pourquoi, dans ce cas, il y a un stigmatisme approché.**



Solution

1. On a : $\operatorname{tg} i = \dfrac{HI}{\overline{AH}}$ et $\operatorname{tg} i' = \dfrac{HI}{\overline{A'H}}$ d'où $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{A'H}} = \dfrac{\operatorname{tg} i'}{\operatorname{tg} i}$

Par ailleurs, on a : $n \sin i = n' \sin i'$.

Par suite, on a/ $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{A'H}} = \dfrac{n \cos i}{n' \cos i'}$.

2. Au premier ordre en i, on a $\cos i \cong 1$ d'où : $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{A'H}} = \dfrac{n}{n'}$.

Dans ce cas, la position de A' ne dépend pas de I donc tous les rayons issus de A ayant une faible incidence émergeront en semblant provenir du point A'. Il y a donc un stigmatisme approché.

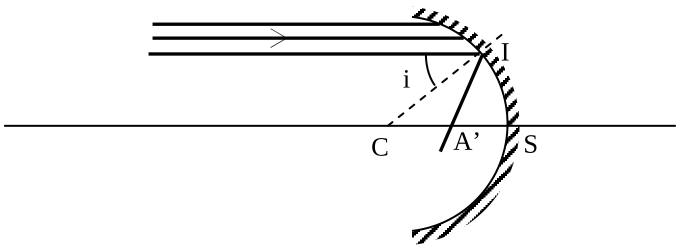
EP.4.2. : Stigmatisme approché du miroir sphérique

Un miroir sphérique de centre C et de sommet S est éclairé par un faisceau parallèle à l'axe optique (CS) provenant d'un objet A situé à l'infini.

Soit un rayon particulier incident en I, d'angle d'incidence i. Ce rayon est réfléchi en coupant l'axe optique en A'.

1. Trouver l'expression de CA' en fonction de R et de i. Conclure.

2. Montrer que si on se place dans les conditions de Gauss, il y a stigmatisme approché et tous les rayons convergent vers un même point A' dont on donnera la position.



Solution

1. Le triangle CA'I est isocèle et l'angle en C est égal à i. On a donc

$\cos i = \dfrac{R}{2\ CA'}$.

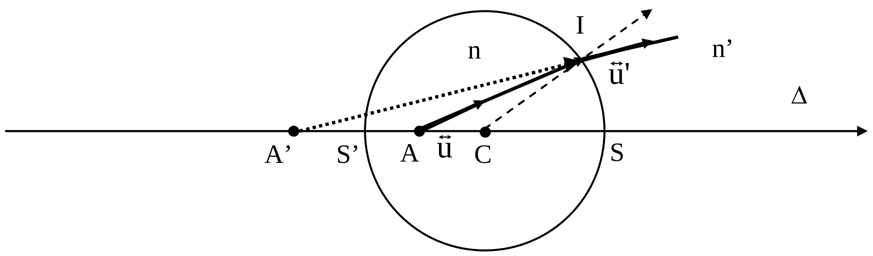
Il s'ensuit que $CA' = \dfrac{R}{2\ \cos i}$. : la position de A' dépend de i donc du rayon lumineux incident . Il n'y a donc pas de stigmatisme dans le cas général.

2. Si on se place dans les conditions de Gauss, le rayon incident doit se trouver au voisinage de l'axe optique et par suite l'angle d'incidence i est très faible. Par conséquent : $\cos i \cong 1$ et $CA' = \dfrac{R}{2}$.

Il y a un stigmatisme approché et tous les rayons convergent vers un même point A' qui se trouve au milieu du segment [SC].

EP.4.3. : Stigmatisme rigoureux du dioptre sphérique

Soit une boule sphérique de centre, de rayon R et d'indice n plongée dans un milieu d'indice n'. On considère un diamètre SS' de la boule et on se propose de montrer qu'il existe sur ce diamètre un couple de points (A,A') conjugués pour lequel le chemin optique[AA'] qui les sépare est nul quel que soit le point I de réfraction sur la sphère.



1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ les vecteurs unitaires respectifs pour les rayons incident et réfracté. Donner l'expression du chemin optique [AA'] et en déduire une relation entre $\overline{AI}$ et $\overline{IA'}$.

2. En prenant comme point de réfraction le point S trouver une relation entre $\overline{SA}$ et $\overline{SA'}$.

3. En considérant S' comme point de réfraction, trouver une relation entre $\overline{S'A}$ et $\overline{S'A'}$.

4. Déduire des résultats précédents la position des points A et A' vérifiant le stigmatisme parfait.

5. Généraliser ce résultat.

Solution

1. $L = n\ \overrightarrow{AI}\,.\,\vec{u} + n'\ \overrightarrow{IA'}\,.\,\vec{u}' = 0$. Par conséquent , on a $n\ \overline{AI} + n'\ \overline{IA'} = 0$ pour tous les points I sur la sphère.

2. En prenant I = S, on trouve la relation $n\,\overline{SA} = n'\,\overline{SA'}$.

3. En prenant I = S', on trouve la relation $n\,\overline{S'A} = -\,n'\,\overline{S'A'}$.

4. On a donc les relations suivantes : $\dfrac{\overline{SA}}{\overline{SA'}} = -\dfrac{\overline{S'A}}{\overline{S'A'}} = \dfrac{n}{n'}$

et par suite $\dfrac{\overline{SC} + \overline{CA}}{\overline{SC} + \overline{CA'}} = -\dfrac{\overline{S'C} + \overline{CA}}{\overline{S'C} + \overline{CA'}} = \dfrac{n}{n'}$.

On trouve alors que $\overline{CA} = -\frac{n'}{n}\overline{CS}$ et $\overline{CA'} = -\frac{n}{n'}\overline{CS}$. A et A' sont conjugués car tous les rayons issus de A conduisant à l'image A' ; ce couple de points vérifie la condition de stigmatisme parfait.

5. Ce résultat se généralise pour un couple de points (A,A') vérifiant la condition de stigmatisme parfait sur chaque diamètre de la sphère.

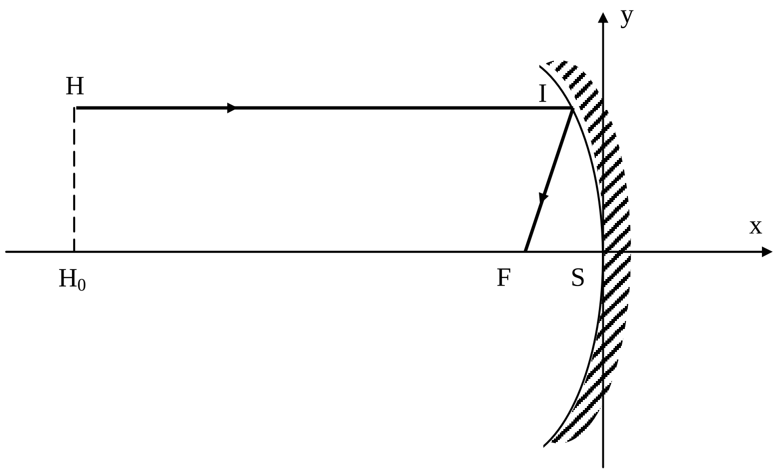
EP.4.4 : Miroir parabolique

Un miroir parabolique de foyer F et de sommet S reçoit un faisceau parallèle à son axe.

On considère le repère orthonormé (S,x,y). La trace du miroir dans ce plan est une parabole d'équation $x = -\frac{y^2}{2p}$ de foyer F (-p/2, 0) où p est une constante positive homogène à une longueur.

1. Calculer le chemin optique L = [HF] en fonction des coordonnées du point I et de la distance d=H_0S où H_0 est la projection orthogonale du point H sur l'axe optique.

2. Montrer qu'après réflexion sur le miroir, tous les rayons incidents convergent vers un même point F qui est le foyer du miroir, quel que soit le point d'incidence I. Conclure.



Solution

1. Le point I(x,y) du miroir vérifie l'équation de la parabole : $x = -\frac{y^2}{2p}$.

Le chemin optique L s'écrit :

$$L = [HF] = [HI] + [IF]$$

avec : $[HI] = x + dx$

$$[IF] = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right) + y^2}$$

soit : $L = x + dx + \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right) + y^2}$

2. En utilisant l'équation de la parabole, on a :

$$L = d - \frac{y^2}{2p} + \sqrt{y^2 + \left(-\frac{y^2}{2p} + \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$L = d - \frac{y^2}{2p} + \sqrt{\frac{y^4}{4p^2} + \frac{y^2}{2} + \frac{p^2}{4}} = d - \frac{y^2}{2p} + \left(\frac{y^2}{2p} + \frac{p}{2}\right)$$

soit : $L = d + \frac{p}{2}$.

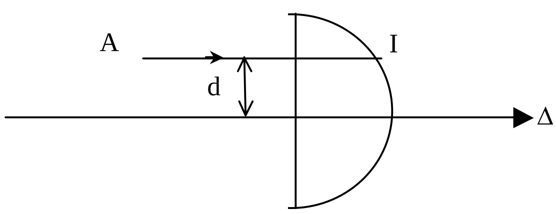
Le chemin optique L est donc indépendant de la position du point I et par conséquent indépendant de la position du rayon incident par rapport à l'axe : le miroir parabolique est donc **rigoureusement stigmatique** pour tout point situé à l'infini. Le foyer image du miroir est confondu avec le foyer F de la parabole .

EP.4.5. : Stigmatisme approché d'une demi boule de verre

On considère une demi-boule de verre, de rayon R et d'indice de réfraction n >1 placée dans l'air d'indice 1. Soit un objet A à l'infini qui émet un faisceau de lumière monochromatique cylindrique normal à la face plane.

1- Soit un rayon lumineux AI de ce faisceau situé à la distance d de l'axe Δ de la demi-boule. Montrer que ce rayon ne peut émerger de la face sphérique que si d est inférieure à une distance d_0 que l'on déterminera en fonction de n et de R.

Application numérique : R = 2 cm et n = $\sqrt{2}$



2- On considère maintenant deux rayons lumineux AI_1, AI_2 et AI_3 situés aux distances respectives $d_1 = \frac{R}{n}$; $d_2 = \frac{R}{2n}$ et $d_3 << R$ de l'axe Δ.

2-a- Tracer la marche de ces rayon lumineux.

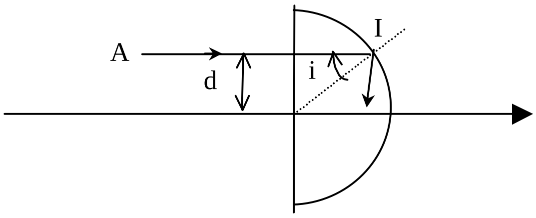
2-b- En déduire l'extension de l'image de l'objet à l'infini.

2-c- En déduire que ce système optique n'est pas stigmatique pour les rayons réfractés.

2-d- Dans quel cas pourrait-on avoir un stigmatisme approché ?

Solution :

1- Soit i l'angle d'incidence du rayon AI sur la surface sphérique du système.



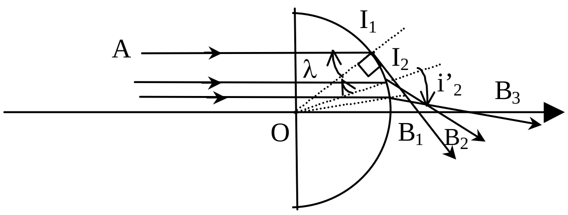
L'angle critique d'incidence est donné par la relation

$$\sin\lambda = \frac{1}{n} = \frac{d}{R}.$$

Si $d > \frac{R}{n}$ alors $\sin i > \sin\lambda$ et $i > \lambda$. Il y a dans ce cas une réflexion totale en I.

Pour avoir un rayon réfracté, il faut que l'on ait $d < \frac{R}{n}$., soit $d_0 = \frac{R}{n}$.

2-a-



Le rayon AI_1 est réfracté en I_1 et coupe l'axe optique en B_1 avec un angle de réfraction $i_1' = 90°$ (AI_1 est tangent en I_1 à la boule). Le triangle OI_1B_1 est rectangle en I_1 et on a :

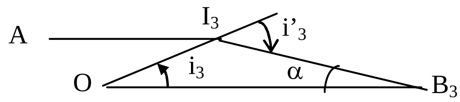
$$OB_1 = \frac{R}{\cos\lambda} = \frac{R}{\sqrt{1-\sin^2\lambda}} = \frac{nR}{\sqrt{n^2-1}}$$

Le rayon AI_2 est réfracté en I_2 et coupe l'axe optique en B_2 avec un angle de réfraction $i_2' = 60°$.

Le rayon AI_3 est para axial et i_3 est très faible.

Déterminons la distance OB_3. Les angles i_3 et i'_3 sont très faibles et la relation de Descartes $n \sin i_3 = \sin i'_3$ devient $n\, i_3 = i'_3$.

Considérons le triangle $0I_3B_3$ et appliquons la loi des sinus



$$\frac{\sin i'_3}{OB_3} = \frac{\sin \alpha}{R} = \frac{\sin (i'_3 - i_3)}{R} \quad .$$

En utilisant le fait que les angles sont faibles, on obtient

$$\frac{i'_3}{OB_3} = \frac{i'_3 - i_3}{R}, \quad \text{d'où} \quad . \quad OB_3 = \frac{nR}{n-1}$$

2-b- L'extension de l'image est donnée par la distance

$$B_3B_1 = nR\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right].$$

2-c- L'image de A n'est pas un point mais une grande tache. Le système optique étudié n'est donc pas stigmatique pour les rayons réfractés.

2-d- Le stigmatisme approché peut être réalisé si la taille du faisceau est petite, c'est à dire dans le cas où $d \ll R$.

Ainsi, $\sin i = \frac{d}{R} = n \sin i'$ est faible , c'est à dire que $i \ll \lambda$.

Dans ce cas l'image de A est en B_3 avec $OB_3 = \frac{nR}{n-1}$.

Dans cette approximation dite approximation de Gauss, le système est stigmatique pour le couple de points A et B_3.

CHAPITRE 5

SYSTÈMES OPTIQUES SIMPLES À FACES PLANES

Nous avons jusqu’à maintenant défini d'une manière générale les "systèmes optiques" sans toutefois en préciser les différents éléments constitutifs qui peuvent être des dispositifs à faces planes, à faces sphériques ou une combinaison de ces dispositifs de formes diverses.

Dans ce chapitre, on s’intéressera aux systèmes plans dont les éléments essentiels sont le miroir plan et le dioptre plan. Le miroir plan, en particulier, constitue une structure clef dans de nombreux dispositifs optiques ; il est utilisé pour diriger un faisceau lumineux, pour le capter et le focaliser. Dans les régions du spectre électromagnétique (U.V. et I.R.) où les systèmes optiques à base de verre ne sont plus transparents, les montages optiques utilisent les miroirs pour véhiculer les faisceaux. On utilise souvent des montages associant plusieurs miroirs agencés suivant des géométries variées pour tourner la direction des faisceaux ou leur faire changer de sens. Dans l’étude des miroirs on retrouve le concept de l’image virtuelle qui est à l’origine de nombreuses applications.

Le dioptre plan constitue, quant à lui, le système le plus familier et le plus naturel ; il est constitué de deux milieux transparents inégalement réfringents séparés par une surface plane et donnant toujours une image qui a la même dimension que l’objet . A la différence du miroir, les rayons incidents sont réfractés, ce qui est à l’origine d’une illusion d’optique. Ainsi, lorsqu’un pêcheur regarde un poisson dans l’eau, il voit l’image virtuelle du poisson qui semble située, pour l’œil, dans la direction du rayon incident.

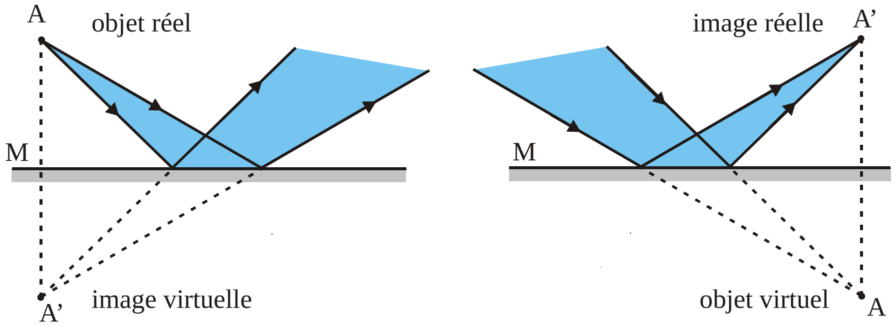
Enfin, l’association de deux dioptres plans donne ce qu’on appelle une lame à faces parallèles dont l’application principale, lorsqu’elle est utilisée dans les conditions de Gauss, est le déplacement, dans la même direction, des rayons incidents.

1. Le miroir plan

Un miroir est une surface capable de réfléchir presque en totalité la lumière incidente. On obtient des miroirs de bonne qualité en taillant une surface de verre à la forme souhaitée (plane, sphérique, paraboloïdique, …) et en déposant sur cette surface une pellicule métallique soit par voie chimique soit par évaporation sous vide. L'argent est le métal idéal pour la réalisation de miroirs car il possède un pouvoir réflecteur élevé.

1.1. Stigmatisme d'un miroir plan

Nous avions déjà fait remarquer que le miroir plan est le seul système réalisant le stigmatisme rigoureux pour tout point de l'espace, **l'image A' d'un point A étant le symétrique de A par rapport à son plan** . Nous avions déjà vu également que ***l'objet A et l'image A' étaient toujours de natures différentes*** .

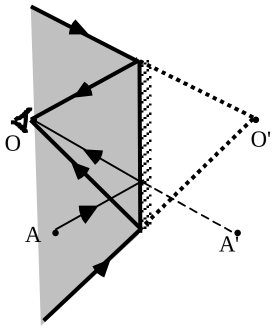


1.2. Champ d'un miroir plan

Le champ d'un miroir plan désigne la région de l'espace que l'on peut "voir" à travers le miroir à partir d'une position donnée O de l'œil.

Il correspond à l'ensemble des points A susceptibles de donner un rayon réfléchi passant par O.

On peut dire qu'inversement le champ d'un miroir plan est la région de l'espace que O éclairerait s'il était une source lumineuse.

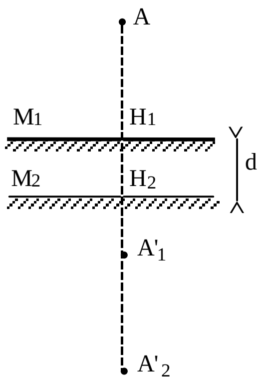


Le champ d'un miroir plan est donné par la partie réelle du cône de sommet O', image de O donnée par le miroir, et de génératrices s'appuyant sur les bords du miroir.

1.3. Déplacement d'une image par déplacement d'un miroir plan

1.3.1. Translation

Déplaçons un miroir M de la position M_1 à la position M_2 suivant une direction normale à sa surface.



Les images A'_1 et A'_2 d'un objet A sont situées sur la même normale au miroir à des positions telles que :

$$H_1 A'_1 = AH_1$$
$$H_2 A'_2 = AH_2$$

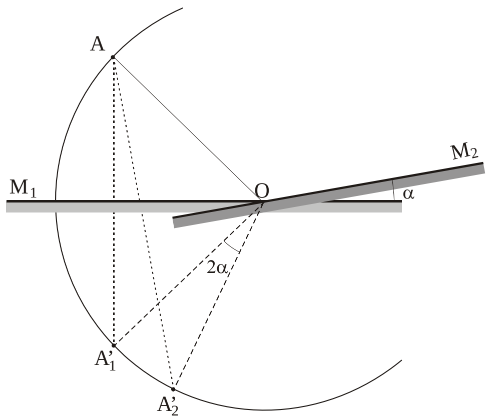
soit : $$A'_1A'_2 = A'_1 H_1 + H_1H_2 + H_2 A'_2$$
$$A'_1A'_2 = H_1A + H_1H_2 + AH_2$$

d'où : $$\mathbf{A'_1A'_2 = 2\, H_1H_2 = 2d}$$

L'image se déplace dans le même sens que le miroir et d'une longueur double.

1.3.2. Rotation

Tournons le miroir M autour d'un axe, passant par O et appartenant à son plan, d'un angle α de la position M_1 à la position M_2 .



Les images A'_1 et A'_2 d'un objet A sont symétriques de A par rapport à M_1 et M_2 . Les points A'_1, A'_2 et A sont sur un cercle de centre de O et de rayon OA.

L'angle inscrit ($A'_1AA'_2$) étant égal à α, l'angle au centre ($A'_1OA'_2$) vaut 2α.

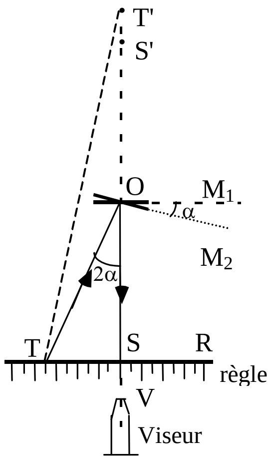
Quand un miroir tourne d'un angle α autour d'un axe, l'image tourne autour de cet axe et dans le même sens d'un angle double 2α .

Il en est de même des rayons réfléchis correspondant à un rayon incident quelconque.

Application : mesure des petites rotations par la méthode de Poggendorff

Considérons, par exemple, le cadre mobile d'un galvanomètre portant un petit miroir plan M. Le cadre est susceptible de tourner autour d'un axe O en effectuant des rotations de faibles amplitudes.

Le miroir M, dans la position M_1, donne de la division S d'une règle graduée R une image S' que l'on regarde à travers un viseur.



Si M_1 tourne d'un petit angle α et vient en M_2 , le rayon réfléchi dans la direction OSV provient de l'image T' de la division T , symétrique de T par rapport à M_2 .

On connaît OS = D et on peut mesurer TS = d

Il est donc possible de connaître $\text{tg}\ 2\alpha = \dfrac{d}{D}$

On en déduit donc la valeur de α pour des petites rotations :

$$\alpha = \frac{d}{2D}$$

Pour D = 1 m, si l'on mesure d à 0,2 mm près, α est déterminé avec une incertitude d'environ 20" .

1.4. Association de miroirs plans

1.4.1. Miroirs parallèles

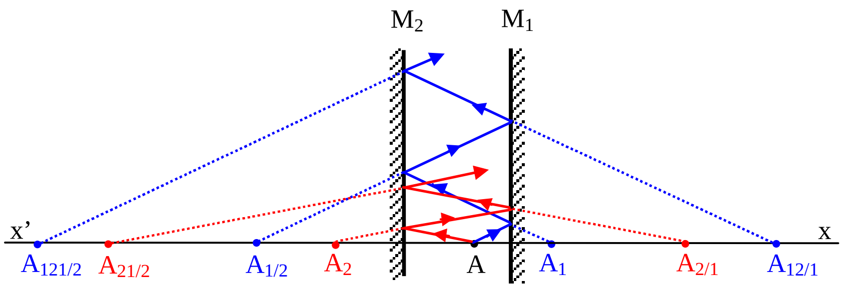
Soient deux miroirs M_1 et M_2 dont les surfaces réfléchissantes sont parallèles et se font face.

L'image d'un objet A donnée par le miroir M_1 est A_1 symétrique de A par rapport à M_1; le miroir M_2 donne de A_1 une image $A_{1/2}$ dont l'image à travers M_1 est $A_{12/1}$, etc. …

De même, l'image de A donnée par le miroir M_2 est A_2 symétrique de A par rapport à M_2; les images de A_2 données successivement par M_1 , M_2 , M_1 , …sont $A_{2/1}$, $A_{21/2}$, $A_{212/1}$, …

Les deux miroirs donnent donc une double infinité d'images alignées sur x'Ax.

La figure donne quelques unes de cette série double d'images et la marche d'un rayon lumineux se réfléchissant en premier sur M_1 .

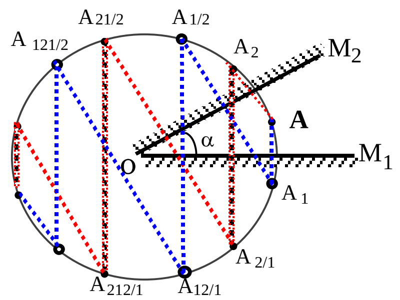


1.4.2. Miroirs faisant entre eux un angle α

Considérons deux miroirs plans M_1 et M_2 faisant entre eux un angle α et dont les surfaces réfléchissantes sont en regard l'une de l'autre. Soit un point lumineux A entre ces faces. Les images successives de A données par M_1 puis M_2 puis M_1 … sont A_1, $A_{1/2}$, $A_{12/1}$ …, alors que celles données par M_2 puis M_1 puis M_2 … sont A_2 , $A_{2/1}$, $A_{21/2}$…

Les deux séries d'images sont dans le plan passant par A et perpendiculaire à l'arête O. Toutes les images sont équidistantes de O, donc disposées sur le cercle de centre O et de rayon OA.

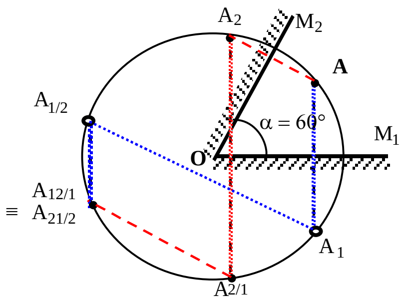
La figure ci-après donne une des deux séries d'images en commençant par A_2 .



<u>Cas particuliers</u> : Ils correspondent à des valeurs particulières de α :

Cas où $\alpha = \frac{\pi}{p}$ avec p entier

L'image de A après chaque couple de réflexions sur M_1 puis sur M_2 , ou sur M_2 puis sur M_1, tourne de $2\,\frac{\pi}{p}$; après p couples de réflexions, elle a tourné de 2π. Après p réflexions, on obtient le point symétrique de A par rapport à O.



Les deux séries d'images donnent la même image après p réflexions et on ne peut donc avoir que

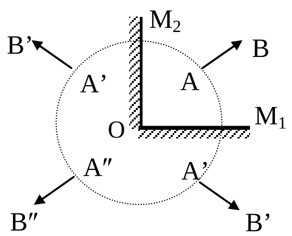
2p - 1 images distinctes

(p = 3 → 5 images)

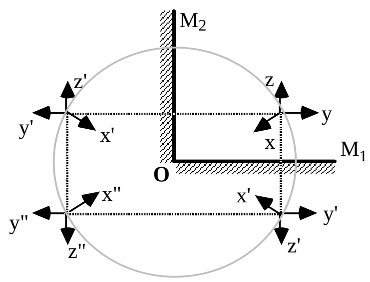
Cas où $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ **(miroirs rectangulaires**) :

Le système donne trois images de A.

L'image $\overrightarrow{A''B''}$ d'un objet $\overrightarrow{AB}$ après un couple de réflexions est symétrique de l'objet par rapport à O



Il est particulièrement intéressant de signaler qu'après un couple de réflexions, l'image d'un trièdre direct est un trièdre direct alors que dans un seul miroir l'image d'un trièdre direct est un trièdre inverse.



2. Le dioptre plan

Un dioptre plan est constitué par l'ensemble de deux milieux transparents, inégalement réfringents, séparés par une surface plane.

2.1.Stigmatisme d'un dioptre plan

Considérons un point objet A_1 dans le milieu (1) d'indice n_1 .

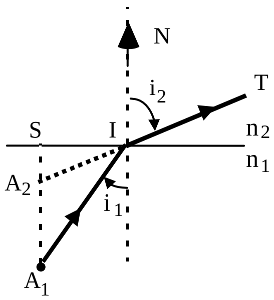
Le système étant de révolution autour de la normale A_1S, le rayon A_1S traverse la surface sans déviation. Si une image de A_1 existe, elle est certainement sur A_1S.

Soit un rayon A_1I quelconque arrivant sur le dioptre avec un angle d'incidence i_1 . Le rayon réfracté IT correspondant coupe A_1S en A_2 tel que

$$SI = SA_1 \text{ tg } i_1 = SA_2 \text{ tg } i_2$$

d'où : $SA_2 = SA_1$

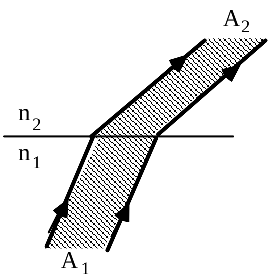
Lorsque i_1 varie, $\frac{\sin i_1}{\sin i_2}$ reste constant mais $\frac{\text{tg}\, i_1}{\text{tg}\, i_2} = \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos i_2}{\cos i_1}$ $\frac{\text{tg } i_1}{\text{tg } i_2}$ n'est pas constant : **les rayons réfractés ne coupent pas SA_1 au même point**.



Le dioptre plan n'est pas stigmatique pour des points pris à distance finie en dehors de son plan.

<u>Cas particulier</u> : <u>Le point objet A est à l'infini</u>

Le faisceau incident est alors parallèle (ou cylindrique) et le faisceau réfracté l'est aussi : ***l'image A_2 est rejetée à l'infini et il y a stigmatisme.***

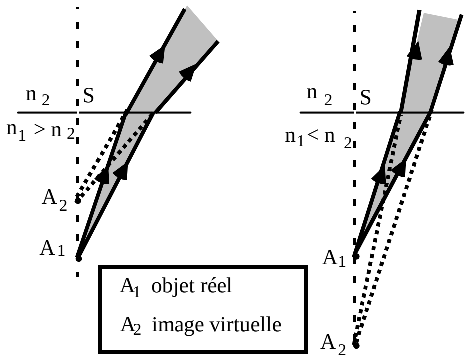


Remarque : il existe un autre cas de stigmatisme rigoureux; il est réalisé pour les points A_1 appartenant à la surface du dioptre, mais ce cas est sans intérêt.

2.2. Stigmatisme approché

Les conditions de stigmatisme approché sont réalisées pour les rayons peu inclinés sur l'axe et pour de faibles angles d'incidence.

Les deux conditions se confondent dans le cas du dioptre plan puisque l'axe (A_1S) est parallèle aux normales au dioptre aux points d'incidence.



Si l'angle i_1 est faible, il en est de même, généralement, de i_2. On peut alors confondre les tangentes avec les angles et par conséquent avec les sinus. On peut donc écrire :

$$SA_2 = SA_1 \frac{\text{tg } i_1}{\text{tg } i_2} \# SA_1 \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = SA_1 \frac{n_2}{n_1}$$

Cette relation peut encore s'écrire :

$$\frac{\overline{\mathbf{SA_1}}}{\mathbf{n_1}} = \frac{\overline{\mathbf{SA_2}}}{\mathbf{n_2}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\overline{\mathbf{SA_2}}}{\overline{\mathbf{SA_1}}} = \frac{\mathbf{n_2}}{\mathbf{n_1}}$$

A condition que A_1 n'envoie que des rayons peu écartés de l'axe A_1S , les rayons réfractés concourent en A_2 .

On a donc stigmatisme approché pour le couple de points A_1 et A_2 .

La relation obtenue, appelée "***relation de conjugaison*** ", montre que $\overline{SA_1}$ et $\overline{SA_2}$ sont toujours de même signe et; par conséquent; que ***A_1 et A_2 sont dans le même milieu et toujours de natures opposées*** .

La distance entre l'objet et l'image est donnée par :

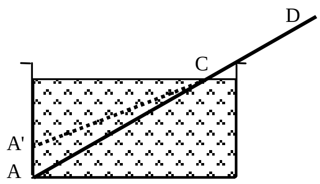
$$\overline{\mathbf{A_1A_2}} = \overline{\mathbf{SA_1}} - \overline{\mathbf{SA_1}} = \overline{\mathbf{SA_1}}\left(\frac{\mathbf{n_2}}{\mathbf{n_1}} - \mathbf{1}\right)$$

Il y a rapprochement apparent de A_1 vers la surface si $n_2 < n_1$ et éloignement apparent si $n_2 > n_1$.

Application : image d'une règle plongeant partiellement dans un liquide

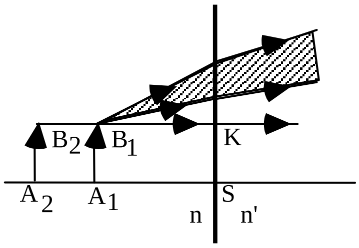
Une règle ACD dont une partie est plongée dans l'eau, par exemple, paraît occuper la position A'CD pour un observateur placé dans l'air, au-dessus de l'eau, recevant des rayons para axiauxux.

La règle lui apparaît "brisée" en C, l'image étant rapprochée de la surface.



2.3. Image d'un petit objet parallèle au dioptre

Considérons un petit objet $\overrightarrow{A_1B_1}$ disposé parallèlement à la surface du dioptre; ou encore perpendiculairement à l'axe SA_1 du dioptre. Plaçons nous dans le cas où l'indice n' du milieu (2) est supérieur à l'indice n du milieu (1).



L'image A_2 de A_1 se trouve sur l'axe SA à une distance du dioptre donnée par :

$$\overline{SA_2} = \overline{SA_1}\,\frac{n'}{n}$$

L'image B_2 de B_1 se trouve sur la droite KB_1 parallèle à SA_1 et passant par B_1; à une distance du dioptre :

$$\overline{KB_2} = \overline{KB_1}\,\frac{n'}{n}$$

Comme $\overline{KB_1} = \overline{SA_1}$; alors $\overline{KB_2} = \overline{SA_2}$ et *l'image* $\overline{A_2B_2}$ *est de même grandeur que l'objet* $\overline{A_1B_1}$ *, de même sens mais de nature différente.*

3. Lames à faces parallèles

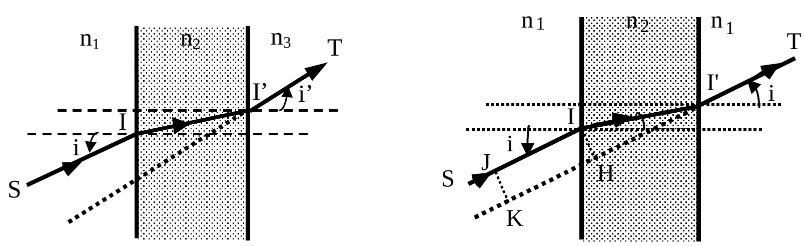
Une lame à faces parallèles est constituée par un milieu transparent et homogène limité par deux surfaces planes et parallèles. Chacune de ses faces est placée soit dans le même milieu soit dans des milieux différents.

3.1. Marche d'un rayon lumineux

Dans le cas général où les milieux extrêmes ont des indices différents (n_1 et n_3), un rayon incident SI, arrivant sur la lame sous un angle d'incidence i et se réfractant une première fois sur la face d'entrée puis une deuxième fois sur la face de sortie, en ressort sous un angle i'. Les angles i et i' sont tels que

$$n_1 \sin i = n_3 \sin i'$$

les angles de réfraction et d'incidence à l'intérieur de la lame étant égaux.



Le cas le plus intéressant est celui où les ***milieux extrêmes sont les mêmes*** ($n_1 \equiv n_3 = n'$).

On pose $\frac{n_2}{n'} = n$, n_2 représentant l'indice absolu de la lame et n son indice relatif par rapport au milieu extérieur dans ce cas l'indice de ce dernier doit être considéré comme égal à 1.

Le rayon émergent est alors parallèle au rayon incident : $i' \equiv i$. Le rayon SI subit un déplacement latéral IH :

$$IH = II' \sin(i - r)$$

Si “ e ” est l'épaisseur de la lame, on aura : $II' = \dfrac{e}{\cos r}$

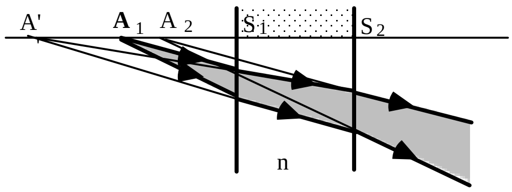
et
$$\mathbf{IH = \dfrac{e \sin(i - r)}{\cos r}}$$

3.2. Stigmatisme d'une lame à faces parallèles

Une lame à faces parallèles étant constituée de deux dioptres plans, il est évident qu'elle ne réalise les conditions de stigmatisme rigoureux que pour des points particuliers : les points objets A à l'infini.

On se placera donc dans les conditions de stigmatisme approché c'est-à-dire de rayons para axiaux.

Le premier dioptre donne d'un point objet A_1 une image A' , cette dernière joue le rôle d'objet pour le second dioptre qui en donne l'image finale A_2. Ces trois points sont sur le rayon perpendiculaire à la lame qui rencontre respectivement ses deux faces en S_1 et S_2 .



La relation de conjugaison des dioptres s'écrit successivement :

- pour le premier dioptre : $\overline{A_1S_1} = \dfrac{\overline{A'S_1}}{n}$

- pour le deuxième dioptre : $\overline{A_2S_2} = \dfrac{\overline{A'S_2}}{n}$

La distance entre l'objet et l'image est donc donnée par :

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1S_1} + \overline{S_1S_2} + \overline{S_2A_2}$$

$$\overline{A_1A_2} = \frac{\overline{A'S_1}}{n} + \overline{S_1S_2} + \frac{\overline{S_2A'}}{n} = \frac{\overline{A'S_1}}{n} + \overline{S_1S_2} + \frac{\overline{S_2S_1}}{n} + \frac{\overline{S_1A'}}{n}$$

soit :
$$\mathbf{\overline{A_1A_2} = \overline{S_1S_2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

La position de l'image se déduit de celle de l'objet par une translation normale aux faces, de grandeur constante, indépendante de la position de l'objet :

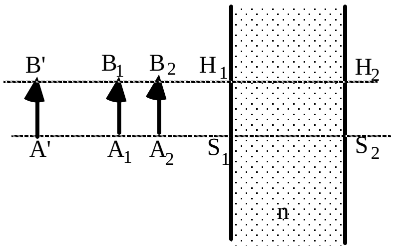
$$\overline{\mathbf{A_1A_2}} = \mathbf{e}\left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)$$

Le déplacement apparent de l'objet a lieu dans le sens de la lumière lorsque n > 1.

3.3. Image d'un petit objet parallèle à la lame

On se place dans les conditions de stigmatisme approché.

L'image $\overline{A'B'}$ de $\overline{A_1B_1}$ donnée par le premier dioptre se déduit de $\overline{A_1B_1}$ par simple translation. Il en est de même de l'image $\overline{A_2B_2}$ de $\overline{A'B'}$ donnée par le second dioptre.



L'image $\overline{A_2B_2}$ de l'objet $\overline{A_1B_1}$ lui est parallèle, de même dimension et de nature opposée.

Exercices et problèmes

E.P.5.1.: Miroir plan

Une personne de taille h s'observe dans un miroir rectangulaire accroché à un mur et situé à une distance d d'elle.

Quelle est la longueur minimale du miroir et à quelle hauteur du sol faut-il l'accrocher pour que la personne s'y voit entièrement ?

Solution

L'image est située à la distance 2d de l'objet.

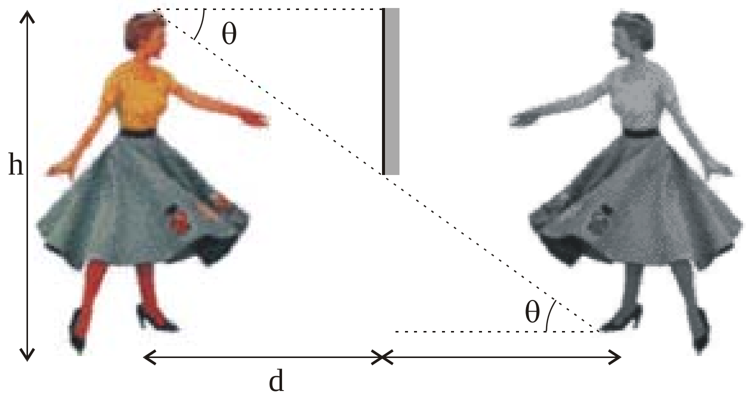
On a : $\text{tg}\ \theta = \frac{h}{2d}$.

Soit H la hauteur minimale du miroir pour que la personne s'observe de la tête aux pieds.

On a dans ce cas : $\text{tg}\ \theta = \frac{H}{d}$.

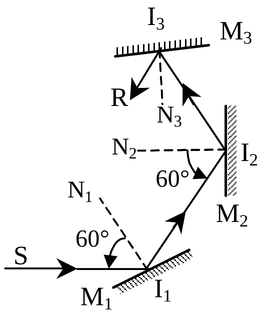
Par identification on obtient : $H = \frac{h}{2}$

Le miroir doit donc être placé à une hauteur égale $\frac{h}{2}$ du sol.



E.P.5.2.: Association de trois miroirs

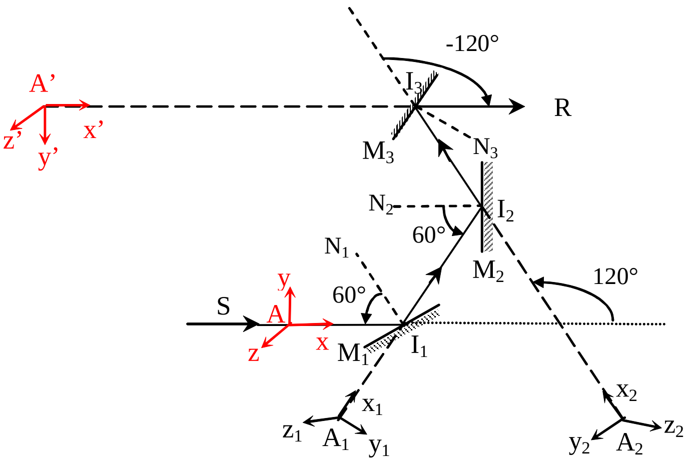
Un rayon lumineux SI_1 se réfléchit successivement sur trois miroirs plans M_1, M_2, M_3 perpendiculaires au plan d'incidence. Les angles d'incidence sur M_1 et M_2 sont égaux à 60°.



1- Quelle doit être l'orientation du miroir M_3 pour que, après les trois réflexions, le rayon réfléchi I_3R ait même direction et même sens que SI_1 ?

2- Que peut-on dire de l'image d'un objet donnée par le système ?

Solution



1. La déviation entre les rayons SI_1 et I_2I_3 est égale à

$D = D_{I_1} + D_{I_2} = 120°$

L'orientation du miroir M_3 doit être telle que ce miroir donne à I_2I_3 une déviation de 120° en sens inverse. L'angle de I_2I_3 avec I_3R doit donc être de 60° ou encore l'angle d'incidence sur M_3 doit être de 30°.

2. Considérons comme objet le trièdre Axyz. L'image du trièdre après trois réflexions est A'x'y'z'. Les axes $\overrightarrow{Ax}$ et $\overrightarrow{Ay}$, qui appartiennent au plan d'incidence, restent au cours des différentes réflexions dans ce plan, mais après trois réflexions

$\overrightarrow{A'y'}$ est de sens opposé à $\overrightarrow{Ay}$. L'axe $\overrightarrow{Az}$, perpendiculaire au plan d'incidence, après les trois réflexions, a pour image $\overrightarrow{A'z'}$ qui a même sens que $\overrightarrow{Az}$.

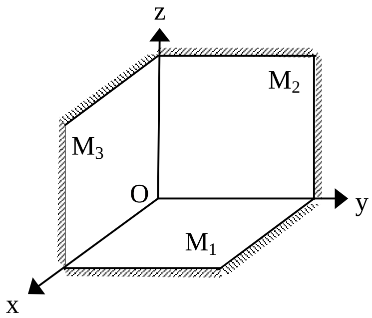
Les axes du trièdre A'x'y'z' sont donc symétriques des axes du trièdre Axyz par rapport au plan d'incidence.

EP.5.3.: Miroirs formant un trièdre

Soit un système de trois miroirs plans formant un trièdre trirectangle.

Déterminer le rayon émergent associé à un rayon incident quelconque après une réflexion sur chacun des miroirs, ainsi que l'image d'un objet A quelconque.

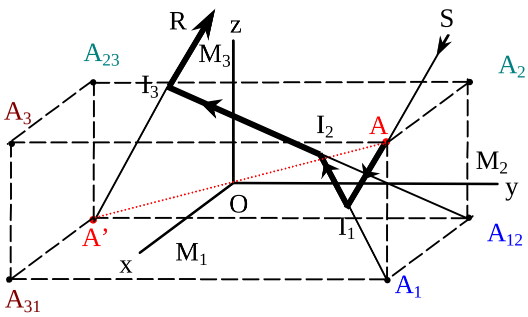
Préciser l'intérêt d'un tel système.



.Solution

Supposons que les miroirs sont rencontrés par le rayon lumineux dans l'ordre M_1, M_2, M_3.

Soit SI_1 un rayon incident quelconque en un point I_1 du miroir M_1.



Le support du rayon réfléchi I_1I_2 est symétrique du support du rayon SI_1 par rapport au plan du miroir M_1. De même, le support du rayon I_2I_3 est symétrique de celui du rayon I_1I_2 par rapport au miroir M_2 et, enfin, le support du rayon I_3R est

symétrique de celui du rayon I_2I_3 par rapport au miroir M_3. Il en résulte que le support du rayon I_3R trois fois réfléchi est symétrique de SI_1 par rapport à O.

Le rayon émergent est donc parallèle au rayon incident mais de sens opposé.

Ceci reste vrai quel que l'ordre dans lequel on compose les symétries planes c'est-à-dire quel que soit l'ordre dans lequel les miroirs sont rencontrés.

Soit A un point quelconque de coordonnées (x,y,z) dans le repère orthonormé Oxyz.

Les symétries par rapport aux trois plans M_1 (Oxy), M_2 (Oyz) et M_3 (Ozx) donnent :

$$A \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right. \xrightarrow{M_1(Oxy)} A_1 \left| \begin{matrix} x \\ y \\ -z \end{matrix} \right. \xrightarrow{M_2(Oyz)} A_{12} \left| \begin{matrix} -x \\ y \\ -z \end{matrix} \right. \xrightarrow{M_3(Ozx)} A' \left| \begin{matrix} -x \\ -y \\ -z \end{matrix} \right.$$

L'image A' de A est donc symétrique de A par rapport à O quel que soit l'ordre des réflexions sur les miroirs :

$$A \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right. \xrightarrow{M_2(Oyz)} A_2 \left| \begin{matrix} -x \\ y \\ z \end{matrix} \right. \xrightarrow{M_3(Ozx)} A_{23} \left| \begin{matrix} -x \\ -y \\ z \end{matrix} \right. \xrightarrow{M_1(Oxy)} A' \left| \begin{matrix} -x \\ -y \\ -z \end{matrix} \right.$$

$$A \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right. \xrightarrow{M_3(Ozx)} A_3 \left| \begin{matrix} x \\ -y \\ z \end{matrix} \right. \xrightarrow{M_1(Oxy)} A_{31} \left| \begin{matrix} x \\ -y \\ -z \end{matrix} \right. \xrightarrow{M_2(Oyz)} A' \left| \begin{matrix} -x \\ -y \\ -z \end{matrix} \right.$$

Si le système des trois miroirs tourne de manière quelconque autour de O, les images intermédiaires se déplacent mais l'image A' reste fixe et le parallélisme du rayon incident et du rayon trois fois réfléchi est conservé.

Remarques :

Un tel système a été déposé sur la lune afin de mesurer, au centimètre près, la distance Terre-Lune en mesurant le temps mis par un rayon laser pour effectuer un trajet aller-retour, le rayon "retour" étant très proche du rayon "aller". Avec un simple miroir plan, il aurait été très difficile, sinon impossible, que le rayon revienne sur l'émetteur.

Ce système est utilisé pour confectionner les catadioptres d'automobiles ou de vélos. Montés sur un vélo, ils renvoient vers le conducteur d'une voiture, qui suit le vélo, la lumière émise par ses propres phares

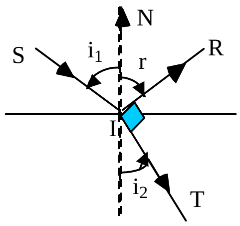
EP.5.4. : Dioptre plan

Un dioptre plan sépare l'air d'indice $n_0 = 1$ d'un milieu d'indice n.

Pour quelle valeur de l'angle d'incidence i_1 le rayon réfléchi est-il perpendiculaire au rayon réfracté ?

Solution

Le rayon IT devant être perpendiculaire au rayon IR :



On a $\qquad i_2 + \frac{\pi}{2} - r = \pi$ avec $r = - i_1$

soit : $\qquad i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}$ et $i_2 = \frac{\pi}{2} - i_1$

Appliquons la 2ème loi de Descartes :

$$\sin i_1 = n \sin i_2 = n \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) = n \cos i_1$$

soit : $\qquad \mathbf{tg\ i_1 = n}$

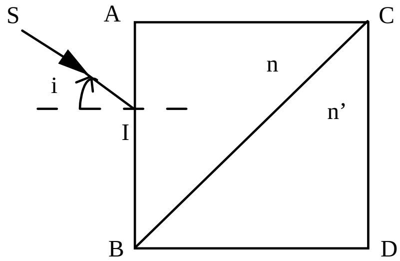
L'angle d'incidence doit avoir une valeur telle que sa tangente soit égale à n.

EP.5.5. : Association de deux prismes rectangles

On accole deux prismes rectangles isocèles comme l'indique la figure. Le prisme ABC est constitué d'un verre d'indice n = $\sqrt{\frac{3}{2}}$ alors que le prisme DBC a pour indice n'. Un rayon lumineux SI arrive sur la face AB sous une incidence i = - 60°.

1- Tracer la marche du rayon lumineux SI à travers le premier prisme.

2- Discuter, selon la valeur de l'indice n' du second prisme, les différents trajets possibles de la lumière.



Solution :

1- En I, on a $\sin i = n \sin i'$ soit $i' = -45°$.

Le rayon réfracté est orthogonal à la face BC. Il ne subit donc aucune déviation à la traversée du dioptre BC.

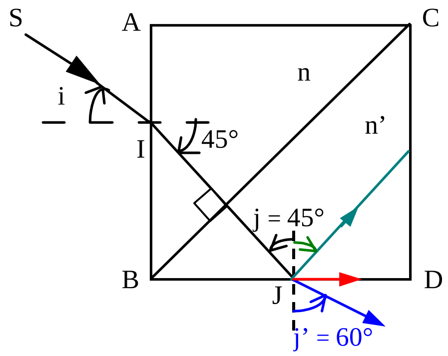
2- Le rayon lumineux arrive sur la face BD, en un point J, avec un angle d'incidence donné par : $j = 45°$.

Il y a trois possibilités selon la valeur de n'. Cherchons tout d'abord l'angle critique d'incidence $\lambda = \text{Arc}\sin(1/n')$

Si $|j| < \lambda \Rightarrow \sin j = \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\lambda \Rightarrow n' < \sqrt{2}$: il a y un rayon émergeant de la face BD avec un angle d'incidence égal à j' tel que $\sin j' = n' \sin j$. D'où $j' = 60°$.

Si $|j| = \lambda \Rightarrow \sin j = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\lambda \Rightarrow n' = \sqrt{2}$: le rayon émerge du prisme parallèlement à la face BD

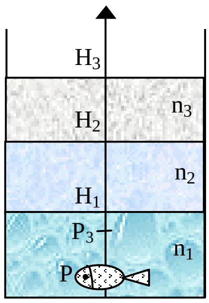
Si $|j| > \lambda \Rightarrow n' > \sqrt{2}$: il y aura par conséquent réflexion totale en J.



EP.5.6. : Association de trois dioptres

Un vase dont le fond est horizontal contient trois couches liquides non miscibles d'indices $n_1 = 5/3$, $n_2 = 4/3$ et $n_3 = 3/2$ et d'épaisseur respective $e_1 = 15$ cm, $e_2 = 12$ cm et $e_3 = 12$ cm en allant du bas vers le haut. Un poisson décoratif se trouve à 3 cm du fond du vase.

De quelle distance ce poisson paraît-il rapproché ou éloigné pour un observateur regardant le poisson du haut du vase ?



Solution

Il s'agit de chercher l'image P_3 du poisson P après la réfraction à travers les trois dioptres plans D_1 ($n_1 \rightarrow n_2$), D_2 ($n_2 \rightarrow n_3$) et D_3 ($n_3 \rightarrow 1$) comme suit :

$$P \xrightarrow{D1} P_1 \xrightarrow{D2} P_2 \xrightarrow{D3} P_3 .$$

Soient H_1, H_2 et H_3 les projections orthogonales de P respectivement sur les dioptres D_1, D_2 et D_3.

La formule de conjugaison pour D_1 s'écrit : $\dfrac{\overline{H_1P_1}}{n_2} = \dfrac{\overline{H_1P}}{n_1}$

soit $$\overline{H_1P_1} = \frac{n_2}{n_1}\overline{H_1P} .$$

De même, pour le dioptre D_2, on a : $\dfrac{\overline{H_2P_2}}{n_3} = \dfrac{\overline{H_2P_1}}{n_2}$

d'où $$\overline{H_2P_2} = \frac{n_3}{n_2}\left(\overline{H_2H_1} + \overline{H_1P_1}\right)$$

et pour le dioptre D_3, on a : $\overline{H_3P_3} = \dfrac{\overline{H_3P_2}}{n_3}$

$$\Rightarrow \qquad \overline{H_3P_3} = \frac{\overline{H_3H_2}}{n_3} + \frac{\overline{H_2H_1}}{n_2} + \frac{\overline{H_1P}}{n_1} .$$

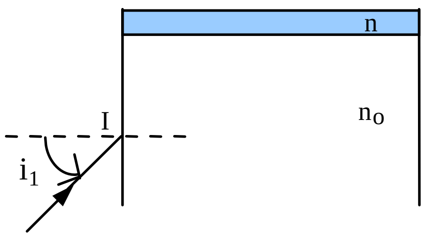
On a donc $\overline{PP_3} = \dfrac{\overline{H_3H_2}}{n_3} + \dfrac{\overline{H_2H_1}}{n_2} + \dfrac{\overline{H_1P}}{n_1} + \overline{PH_3}$

On trouve $\overline{PP_3} = 11{,}8\ \text{cm}$: le poisson paraît rapproché à l'observateur.

EP.5.7. : Mesure de l'indice l'un liquide 1

Pour mesurer l'indice de réfraction d'un liquide, on dispose d'un bloc de verre de forme parallélépipédique d'indice n_0 plongé dans l'air d'indice l'unité. Le liquide d'indice n à mesurer est disposé sur la partie supérieure du bloc de verre.

Un rayon incident, faisant l'angle i_1 avec la normale à une face verticale, se réfracte en I et est ajusté de sorte que l'angle d'incidence en J sur le dioptre avec le liquide d'indice n soit légèrement supérieur à l'angle critique d'incidence λ. Ce rayon émerge dans l'air par la face verticale opposée à la face d'incidence.



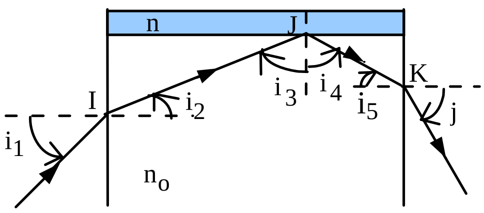
1. Tracer la marche du rayon lumineux.

2. Déterminer l'angle d'émergence j en fonction de l'angle d'incidence i_1.

3. Déterminer l'indice n du liquide et l'angle critique λ en fonction de i et de n_0.

A. N. : $i_1 = 30°$ et $n_0 = 1{,}5$

Solution



1- En I, on a réfraction : $\sin i_1 = n_0 \sin i_2$.

Par ailleurs, $i_2 + i_3 = \dfrac{\pi}{2}$.

En J, il y a une réflexion totale , d'où $i_4 = -i_3$ et $i_4 + i_5 = \dfrac{\pi}{2}$

En K, on a réfraction : $n_0 \sin i_5 = \sin j$.

Or, $i_3 = \lambda$ $\Rightarrow$ $\sin i_3 = \sin\lambda = \dfrac{n}{n_0}$

d'où : $n = n_0 \sin i_3 = n_0 \cos i_2 = n_0 \sqrt{1-\sin^2 i_2} = n_0 \sqrt{1-\dfrac{\sin^2 i_1}{n_0^2}}$

soit : $n = \sqrt{n_0^2 - \sin^2 i_1}$

A.N. : on obtient $n = \sqrt{2}$.

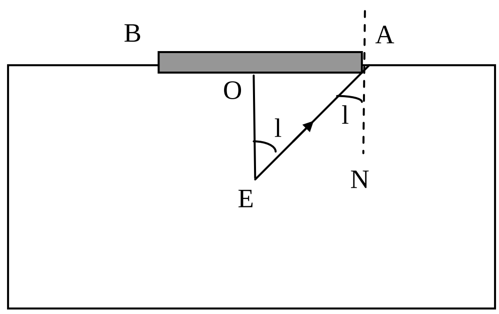
Remarque : i_3 est pris égal λ mais en réalité i_3 est très légèrement supérieur à λ de sorte que l'on ait une réflexion totale

EP.5.8. : Mesure de l'indice d'un liquide 2

Dans un récipient à parois opaques, on verse un liquide dont on veut déterminer l'indice. A la surface du liquide on fait flotter un disque plan, mince, circulaire et opaque, de 10 cm de rayon, traversé en son centre O par une aiguille verticale. On constate que l'extrémité E de cette aiguille cesse d'être visible par la surface quand la longueur immergée OE est inférieure à 9 cm.

Calculer l'indice du milieu.

Solution



Le disque AB arrêtant la lumière, le rayon utile qui fait le plus petit angle d'incidence est EA.

Il ne peut sortir que si l'angle (EAN) ne dépasse pas l'angle limite d'incidence l. Le point E cesse donc d'être visible quand :

$(EAN) = \ell$ avec $\sin\ell = \dfrac{1}{n}$

Cet angle est égal à (OEA) et dans le triangle OEA on a :

$\sin\ell = \dfrac{1}{n} = \dfrac{OA}{EA}$

Donc, finalement : $n = \dfrac{EA}{OA}$

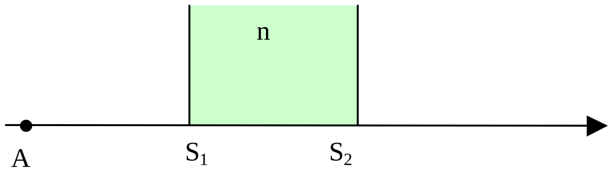
Pour : OA = 10 cm et EA = 9 cm on trouve $n = \dfrac{13{,}4}{10} = 1{,}34$

EP.5.9. : Association d'une lame à faces parallèles et d'un miroir plan

1 On considère un objet A placé à une distance $\overline{S_1A}$ d'une lame à faces parallèles d'épaisseur e = $\overline{S_1S_2}$ d'indice n (n > 1) plongée dans l'air supposé d'indice égal à 1.

1.1. Donner l'expression de la distance séparant A de A' image de A à travers la lame à face parallèle.

1.2. Tracer la marche d'un rayon lumineux faiblement incliné par rapport à l'axe optique.

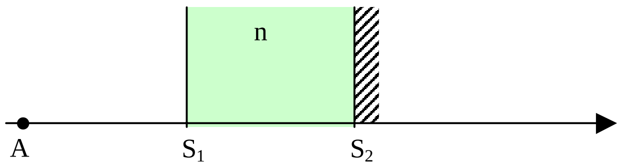


2. On métallise la seconde face de la lame (voir figure).

2.1. Trouver la nouvelle image A'' de A à travers ce système optique (pour cela, on déterminera les images successives de A par le dioptre, le miroir et le dioptre).

2.2. Tracer la marche d'un rayon lumineux faiblement incliné par rapport à l'axe optique.

2.3. Déterminer la position du miroir M' équivalent au système précédent, A et A'' occupant les mêmes positions.

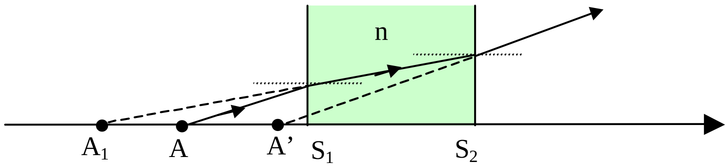


Solution

1.1. Distance $\overline{AA'}$:

$$\overline{AA'} = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

1.2. Marche d'un rayon lumineux



2.1. Image A'' de A :

$$A \xrightarrow{S_1} A_1 \xrightarrow{S_2} A_2 \xrightarrow{S_1} A''$$

- Le dioptre S_1 donne : $\dfrac{\overline{S_1A_1}}{\overline{S_1A}} = \dfrac{n}{1} = n \quad \Rightarrow \quad \overline{S_1A_1} = n\,\overline{S_1A}$

- Le miroir S_2 donne : $\overline{S_2A_2} = -\,\overline{S_2A_1} = -\,(\overline{S_2S_1} + \overline{S_1A_1})$

soit $\overline{S_2A_2} = e - n\,\overline{S_1A}$

- Le dioptre S_1 donne : $\dfrac{\overline{S_1A''}}{\overline{S_1A_2}} = \dfrac{1}{n}$

$$\overline{S_1A''} = \frac{\overline{S_1A_2}}{n} = \frac{\overline{S_1S_2} + \overline{S_2A_2}}{n}$$

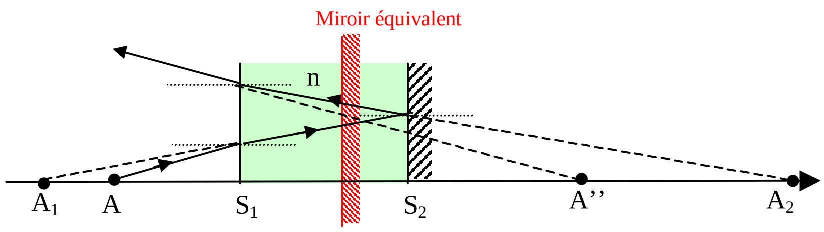
$$\overline{S_1A''} = \frac{2e - n\,\overline{S_1A}}{n}$$

soit $\overline{S_1A''} = \dfrac{2\,e}{n} - \overline{S_1A}$

Distance $\overline{AA''}$: $\overline{AA''} = \overline{AS_1} + \dfrac{2\,e}{n} + \overline{AS_1}$

$$\overline{AA''} = 2\,(\overline{AS_1} + \frac{e}{n})$$

2.2. Marche d'un rayon lumineux :

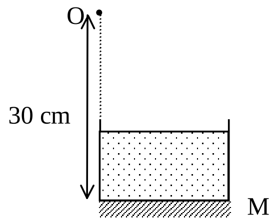


2.3. Miroir équivalent

Le miroir équivalent doit être placé à une distance ($\overline{AS_1} + \frac{e}{n}$) de A ou à une distance $\frac{e}{n}$ de S_1

EP.5.10. : Vase à fond réfléchissant

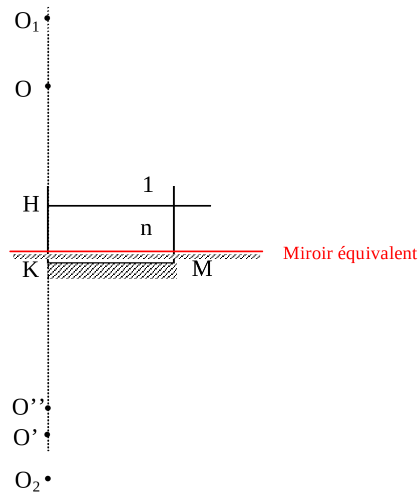
L'œil d'un observateur se trouve à 30 cm au dessus d'un miroir plan M placé au fond d'un récipient.



1- Quelle est la position de l'image O' de O si le récipient est vide ?
2- Dans quel sens et de combien cette image se déplace-t-elle si on remplit le récipient d'eau (n=4/3) jusqu'à une hauteur h=10 cm.
3- On veut remplacer le système précédent par un miroir équivalent M' donnant de l'objet O la même image O" que dans la deuxième question (miroir équivalent au système miroir + dioptre). Déterminer la position de M'.

Solution

1- Soient K la projection orthogonale de l'objet O sur le miroir M et O' son image.



D'après la relation de conjugaison pour le miroir plan, on a $\overline{OK} = \overline{KO'}$. Par suite, $\overline{OO'} = -60$ cm .

2- L'image de O est obtenue après réfraction sur le dioptre air–eau puis réflexion sur le miroir M puis réfraction sur le dioptre eau - air :

$$O \xrightarrow{D} O_1 \xrightarrow{M} O_2 \xrightarrow{D} O''.$$

Soit H la projection orthogonale de O sur le dioptre air - eau. On a donc : $\dfrac{\overline{HO_1}}{n} = \overline{HO}$

et $\overline{HO_1} = n\,\overline{HO} = n\,(\overline{HK} + \overline{KO}) = \dfrac{80}{3}$ cm

L'image O_2 à travers le miroir est donnée par : $\overline{O_1K} = \overline{KO_2}$ avec $\overline{O_1K} = -\dfrac{110}{3}$cm

Enfin, l'image finale de O est obtenue après réfraction sur dioptre eau - air :

$\overline{HO''} = \dfrac{\overline{HO_2}}{n} = \dfrac{\overline{HK} + \overline{KO_2}}{n}$ et $\overline{HO''} = -35$ cm .

L'image O″ se trouve à 55 cm de l'œil et $\overline{O'O''} = 5$ cm , c'est à dire que l'image est rapprochée de 5 cm.

3- Le miroir M' doit se trouver à la distance à laquelle la relation de conjugaison vérifie $\overline{OK'} = \overline{K'O''}$. Par conséquent, on doit avoir $\overline{OK'} = -27{,}5$ cm . Le miroir M' doit donc se trouver à 2,5 cm au dessus du miroir M pour être équivalent à lui seul au système optique décrit dans la question 2.

EP.5.11. : Association de deux lames à faces parallèles

Soient deux lames à faces parallèles de même épaisseur e d'indices respectifs n_1 et n_2, parallèles entre elles plongées dans l'air et séparées par des couches d'épaisseur a. Soit A' l'image donnée d'un point A par ce système optique dans les conditions de Gauss.

1. Déterminer $\overline{AA'}$.

2. Montrer que ce système est équivalent à celui obtenu en accolant les deux lames. Trouver l'épaisseur e' et l'indice n' de la lame équivalente.

Solution

1. Soit A_1 l'image de A après la traversée de la première lame et A' l'image obtenue après la traversée des deux lames :

$$A \xrightarrow{\text{lame}\,(n_1)} A_1 \xrightarrow{\text{lame}\,(n_2)} A'$$

comme $\overline{AA_1} = e\left(1 - \dfrac{1}{n_1}\right)$ et $\overline{A_1A'} = e\left(1 - \dfrac{1}{n_2}\right)$.

on a $\overline{AA'} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A'} = e\left[2 - \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right]$

2. $\overline{AA'} = 2e\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right] = 2e\left[1 - \frac{1}{n'}\right]$ où $n' = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2}$

Ainsi, la lame équivalente est une lame d'épaisseur 2e et d'indice n'.

CHAPITRE 6

LE PRISME

L'association de deux dioptres plans donne des systèmes optiques particulièrement intéressants dans les montages. On peut, comme on l'a vu dans le chapitre IV, associer deux dioptres plans en les disposant parallèlement et on obtient des lames à faces parallèles, et on peut également les associer de façon à ce qu'ils forment un dièdre et on obtient des prismes.

Nous verrons, qu'à la différence des lames à faces parallèles, les prismes dévient les rayons et que lorsque ceux-ci sont polychromatiques, la lumière émergente présente plusieurs couleurs variant progressivement du violet au rouge : c'est le phénomène de dispersion.

Nous allons étudier séparément ces effets. Nous commencerons par trouver les conditions d'émergence des rayons tombant sur le prisme, puis nous étudierons la déviation des rayons lumineux introduite par le prisme en fonction des divers paramètres caractérisant le prisme et les rayons incidents et enfin nous aborderons le phénomène de dispersion.

Le prisme est une des pièces maîtresses dans de nombreux montages optiques :

La déviation des rayons lumineux est utilisée en particulier dans les périscopes qui sont des instruments destinés à surveiller des lieux ou des objets dont l'observateur ne peut s'en approcher soit parce qu'ils sont dangereux soit parce qu'ils sont hors de portée.

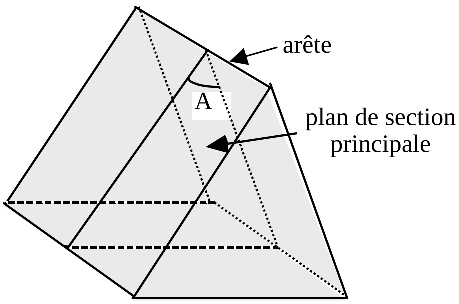
La dispersion de la lumière est à la base de la spectroscopie, technique qui permet d'analyser la composition de la matière à partir de l'émission de ses divers constituants. Chaque raie observée est caractéristique d'un atome donné et on peut donc, par exemple, en récoltant convenablement la lumière émise par une étoile, en déduire ses principaux composants. L'appareil utilisé est appelé "spectrographe à prisme".

1. Formules du prisme

1.1. Définition

Le prisme est un milieu réfringent, transparent, homogène et isotrope limité par deux dioptres plans qui se coupent suivant une droite appelée **"arête "** du prisme.

On caractérise le prisme par l'**angle A** du dièdre formé par les deux plans et par son **indice n** de réfraction.



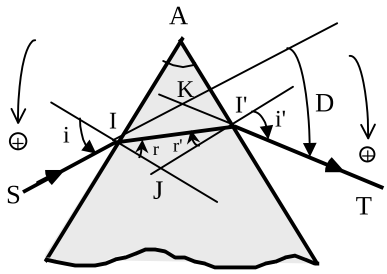
En général, le prisme est plongé dans l'air.

Le prisme est utilisé soit pour changer le sens ou la direction de propagation d'un rayon lumineux à la suite de réfractions ou de réflexions, soit pour analyser une lumière polychromatique grâce à ses propriétés dispersives.

1.2. Marche d'un rayon lumineux.

Pour tracer la marche d'un rayon lumineux à travers le prisme, on se place en général dans un **plan de section principale perpendiculaire à l'arête du prisme**. Ce plan est considéré comme le plan d'incidence et tous les rayons provenant d'un rayon incident et traversant le prisme sont contenus dans ce plan. En effet, un rayon incident SI se réfracte en I en restant dans ce plan; s'il rencontre la deuxième face en I', il émerge dans le même plan.

On se place dans les conditions où le rayon incident émerge du prisme.



Convention de signe :

Les angles étant toujours orientés de la normale vers le rayon, on convient de noter positivement :

- les angles i et r à l'entrée lorsqu'ils sont orientés dans le sens trigonométrique
- les angles à la sortie, i' et r' ainsi que la déviation D, lorsqu'ils sont orientés dans le sens inverse.

1.3. Formules du prisme :

* A l'entrée et à la sortie du prisme, les lois de Descartes donnent :

$$\mathbf{\sin i = n \sin r}$$
$$\mathbf{\sin i' = n \sin r'}$$

* Dans le quadrilatère AIJI', on a :

$$A + \frac{\pi}{2} + J + \frac{\pi}{2} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad J = \pi - A$$

* Dans le triangle IJI', on a :

$$r + J + r' = \pi \quad \Rightarrow \quad J = \pi - (r + r')$$

soit : $\mathbf{r + r' = A}$

* Dans le triangle IKI', on a :

$$(i - r) + K + (i' - r') = \pi$$

Comme $K = \pi - D$, alors : $(i + i') - (r + r') + \pi - D = \pi$

soit : $\mathbf{D = (i + i') - A}$

Les formules du prisme sont donc :

$\sin i = n \sin r$	(1)
$\sin i' = n \sin r'$	(2)
$A = r + r'$	(3)
$D = (i + i') - A$	(4)

1.4.- Conditions d'émergence du rayon incident

1.4.1. Conditions sur r

En pénétrant par la première face du prisme le rayon incident est réfracté puis tombe sur la deuxième face sous l'angle d'incidence r' = A - r. Pour que le rayon puisse émerger, il faut que r' soit inférieur ou égal en valeur absolue à l'angle critique d'incidence λ défini par $\sin\lambda = \frac{1}{n}$.

Soit : $-\lambda \leq r' \leq \lambda$

$$-\lambda \leq A - r \leq \lambda$$

d'où : $A - \lambda \leq r \leq A + \lambda$ (a)

Par ailleurs, l'angle d'incidence i variant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, il en résulte que : $-\lambda \leq r \leq +\lambda$ (b)

La comparaison des conditions (a) et (b) montre que r doit être

- inférieur à la plus petite des valeurs de $A+\lambda$ et λ
- supérieur à la plus grande des valeurs de $A-\lambda$ et $-\lambda$

soit finalement :

$$\mathbf{A - \lambda \leq r \leq \lambda}$$

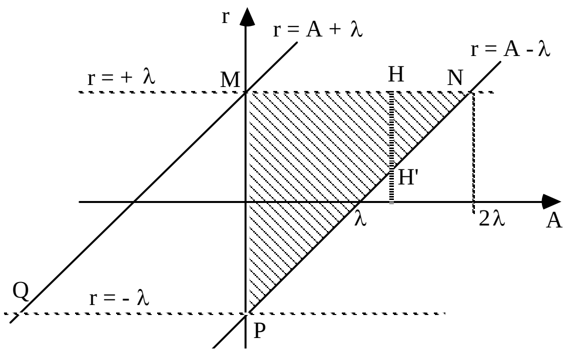
1.4.2. Conditions sur A

Pour trouver ces conditions remarquons que A = r + r' avec $|r| \leq \lambda$ et $|r'| \leq \lambda$

soit : $\mathbf{A \leq \lambda}$

<u>Autre méthode</u> : traçons les graphes $r = A \pm \lambda = f(A)$. On remarque que les inégalités précédentes [(1) et (2)] ne sont satisfaites qu'à l'intérieur du parallélogramme MNPQ. Comme l'angle A du prisme est positif, la région permise se limite au triangle hachuré MNP .

Le graphe donne directement la condition d'émergence : $\mathbf{A \leq 2\lambda}$:



Lorsque cette condition n'est pas remplie, aucun trajet analogue à SII'T ne peut exister dans le prisme. C'est ce qui arrive lorsqu'on utilise un prisme en verre (n = 1,5) d'angle A = 90° car λ = 42° (on a réflexion totale en I')

1.4.3. Conditions sur i

Pour un A donné remplissant la condition précédente, on peut atteindre les limites de variation de l'angle d'incidence i qui correspondent aux valeurs limites de r (points H et H' du graphe) :

pour $r = \lambda$ (point H) on a $i = \frac{\pi}{2}$ puisque $\sin i = n \sin \lambda = 1$

pour $r = r_0 = A - \lambda$ (point H') on a $i = i_0$ tel que :

$$\sin i_0 = n \sin r_0 = n \sin (A - \lambda)$$

Pour l'angle d'incidence la condition d'émergence s'écrit donc sous la forme :

$$\mathbf{i_0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}}$$

Ainsi pour un angle A donné, on a pour les angles d'entrée et de sortie les variations suivantes :

i	i_0	↗	$\frac{\pi}{2}$
r	A - λ	↗	λ
r	λ	↘	A -λ
i'	$\frac{\pi}{2}$	↘	i_0

2. Etude de la déviation du prisme

La déviation D est une fonction de trois variables indépendantes: l'indice n, l'angle du prime A et l'angle d'incidence i. Pour en étudier les variations on est amené à examiner successivement l'influence de chacun de ces paramètres en maintenant les deux autres constants. Pour ce faire on calcule les dérivées $\frac{dD}{dA}$, $\frac{dD}{dn}$ et $\frac{dD}{di}$ en partant des formules du prisme.

2.1. Variation de la déviation D avec l'angle A du prisme

La différentiation des formules du prisme, en maintenant n et i constants, donne :

$$dr = 0$$
$$\cos i' \, di' = n \cos r' \, dr'$$
$$dA = dr'$$
$$dD = di' - dA$$

d'où :

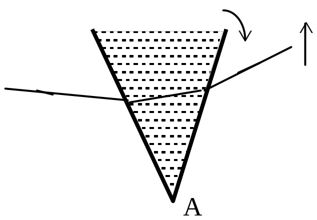
$$\boxed{\frac{dD}{dA} = \frac{di'}{dr'} - 1 = \frac{n\cos r'}{\cos i'} - 1}$$

Puisque n est supérieur à 1, cette quantité est toujours positive car $|r'| < |i'|$ entraîne $\cos r' > \cos i'$ et donc $n \cos r' > \cos i'$:

La déviation D est donc une fonction croissante de A.

De plus, si A est nul, D est nul; ***la déviation est alors toujours positive*** et a lieu par conséquent du coté de la base du prisme.

On peut vérifier expérimentalement cette propriété en utilisant un prisme à liquide articulé en A dont on peut faire pivoter la face de sortie et par conséquent varier A.



Lorsqu'on fait tourner la face de sortie de manière à augmenter l'angle A du prisme, on voit le faisceau émergent se déplacer vers la surface libre du liquide, c'est-à-dire vers la base du prisme.

2.2. Variation de la déviation D avec l'indice n

En différentiant les formules du prisme, en gardant A et i constants, on obtient dans ce cas :

$$0 = n \cos r \, dr + \sin r \, dn$$
$$\cos i' \, di' = n \cos r' \, dr' + \sin r' \, dn$$
$$0 = dr + dr'$$
$$dD = di'$$

Multiplions la première équation par cos r' et la deuxième par cos r et additionnons membre à membre. Il vient :

$$\cos i' \cos r \, di' = n \cos r \cos r' (dr + dr') + (\sin r \cos r' + \cos r \sin r') \, dn$$

comme dr + dr' = 0, il vient :

$$\cos i' \cos r \, di' = \sin (r + r') \, dn = \sin A \, dn$$

soit : $\cos i' \cos r \, dD = \sin A \, dn$

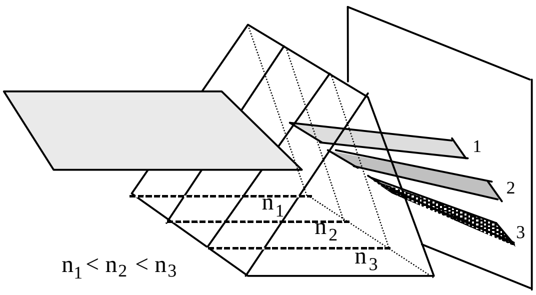
d'où :
$$\boxed{\frac{dD}{dn} = \frac{\sin A}{\cos i' \cos r}}$$

Cette quantité étant toujours positive, il en résulte que :

La déviation croît avec l'indice du prisme.

Cette propriété est mise en évidence lorsqu'on utilise un polyprisme, formé par la superposition de plusieurs prismes de même géométrie mais d'indices différents.

Si l'on éclaire un polyprisme formé de trois prismes par un faisceau de rayons parallèles, on obtient à la sortie trois faisceaux ayant des déviations différentes, le faisceau le plus dévié correspondant au prisme de plus grand indice.



2.3. Variation de la déviation D avec l'angle d'incidence i : Minimum de déviation

La différentiation des formules du prisme donne lorsque A et n sont constants :

$$\cos i \, di = n \cos r \, dr$$
$$\cos i' \, di' = n \cos r' \, dr'$$

$$0 = dr + dr'$$
$$dD = di + di'$$

ce qui conduit à :

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

avec $\frac{di'}{di} = \frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'} \frac{dr'}{dr} = - \frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'}$

soit : $\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'}$

Par conséquent $\frac{dD}{di} = 0$ si $\cos r' \cos i = \cos r \cos i'$;

En élevant cette quantité au carré on obtient :

$$\cos^2 r' \cos^2 i = \cos^2 r \cos^2 i'$$
$$(1 - \sin^2 r') (1 - \sin^2 i) = (1 - \sin^2 r) (1 - \sin^2 i')$$
$$(1 - \sin^2 r') (1 - n^2 \sin^2 r) = (1 - \sin^2 r) (1 - n^2 \sin^2 r')$$

soit : $(1 - n^2) (\sin^2 r - \sin^2 r') = 0$

il en résulte que $\mathbf{r = \pm r'}$

La solution r = - r' est exclue car elle implique que A = 0 (c'est la lame à faces parallèles pour laquelle on a D = 0).

Il s'ensuit alors que :

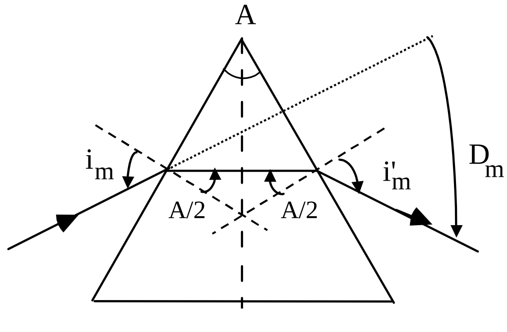
$$\mathbf{R = r' = r_m = \frac{A}{2}}$$

$$\mathbf{i = i' = i_m}$$

et $\mathbf{D_m = 2\, i_m - A}$

avec $\sin i_m = n \sin \frac{A}{2}$

Le tracé du rayon dans le prisme est alors symétrique.



Minimum de déviation :

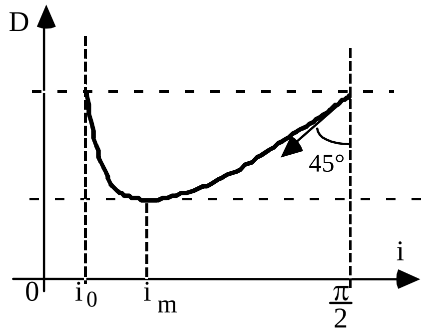
On peut montrer, en calculant la dérivée seconde $\frac{d^2D}{di^2}$, que l'extremum D_m est un minimum. Mais il est plus simple de remarquer que dans le domaine de variation de i [i_0 , $\frac{\pi}{2}$] on a :

pour $i = i_0$: $i' = \frac{\pi}{2}$ donc $\frac{dD}{di} = -\infty$

pour $i = \frac{\pi}{2}$: $i' = i_0 \neq \frac{\pi}{2}$ et $\frac{dD}{di} = 1$

Donc lorsque i augmente, $\frac{dD}{di}$ augmente aussi et passe d'une valeur négative à une valeur positive. La courbe D(i) présente donc un minimum pour lequel on a

$$i_m = \frac{A + D_m}{2} \qquad \text{et} \qquad r_m = \frac{A}{2}$$



2.4. Application : Mesure des indices

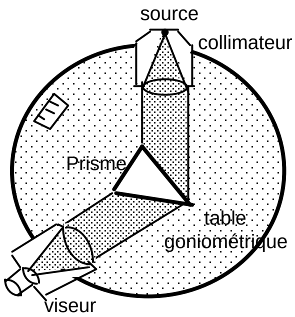
Comme $\sin i_m = n \sin r_m$, on obtient :

$$n = \frac{\sin \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

Pour un prisme d'angle A donné, la mesure de D_m permet la détermination de l'indice n du prisme.

On réalise en général l'expérience à l'aide d'un ***goniomètre*** .

Dans ce montage, un faisceau cylindrique issu d'un collimateur tombe sur le prisme. Un viseur permet d'analyser le faisceau émergent.



En faisant tourner la table autour d'un axe vertical, on peut mesurer le minimum de déviation et par conséquent n.

L'incertitude sur la mesure de l'indice peut être déterminée en différentiant l'expression précédente :

$$\frac{dn}{n} = \frac{d[\sin\frac{A+D_m}{2}]}{\sin\frac{A+D_m}{2}} - \frac{d[\sin\frac{A}{2}]}{\sin\frac{A}{2}}$$

or : $d[\sin\frac{A+D_m}{2}] = \frac{1}{2}\cos\frac{A+D_m}{2}(dA + dD_m)$

$$d[\sin\frac{A}{2}] = \frac{1}{2}\cos\frac{A}{2}\,dA$$

il vient : $\frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\left(\text{cotg}\frac{A+D_m}{2} - \text{cotg}\frac{A}{2}\right)dA + \frac{1}{2}\,\text{cotg}\frac{A+D_m}{2}\,dD$

et $\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{2}\left|\text{cotg}\frac{A+D_m}{2} - \text{cotg}\frac{A}{2}\right|\Delta A + \frac{1}{2}\left|\text{cotg}\frac{A+D_m}{2}\right|\Delta D$

Cette méthode permet de mesurer n avec une grande précision. Ainsi, par exemple, dans le cas où les angles A et D_m ($A = 60°$ et $D_m = 36{,}3°$) sont mesurés à un demi degré près, on trouve $n = 1{,}50 \pm 0{,}01$.

2.5. Stigmatisme du prisme

Le prisme étant constitué de deux dioptres plans, il ne peut réaliser de stigmatisme rigoureux que pour des points objets situés à l'infini. Il est donc impératif d'utiliser des faisceaux parallèles.

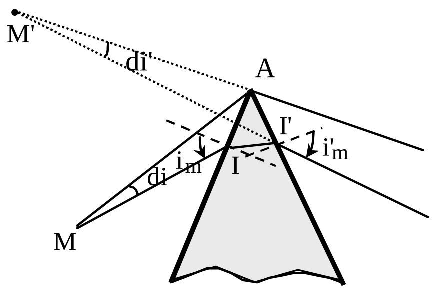
On peut remarquer que le prisme n'est stigmatique à la fois pour les points des deux dioptres que pour les points de l'arête mais ce cas ne présente pas d'intérêt .

Il n'y a *stigmatisme approché* que pour un prisme de petit angle A éclairé en lumière quasi normale, chacun des dioptres réalisant les conditions de stigmatisme approché.

Toutefois, on montre que l'on réalise à peu près les conditions de stigmatisme approché lorsqu'on se place au voisinage du stigmatisme rigoureux, c'est-à-dire lorsqu'on éclaire le prisme par un pinceau de lumière cheminant au voisinage de l'arête dans les conditions de minimum de déviation. Dans ce cas, **le prisme donne d'un point M une image satisfaisante M' à la même distance de l'arête que l'objet**.

En effet, au minimum de déviation on a :

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di} = 0 \text{ , soit } \quad |di| = |di'|.$$



Dans les triangles MAI et M'AI' la loi des sinus donne :

$$\frac{AI}{di} = \frac{MA}{\sin(\frac{\pi}{2} + i_m)} = \frac{MA}{\cos i_m}$$

$$\frac{AI'}{di'} = \frac{MA}{\sin(\frac{\pi}{2} - i_m)} = \frac{M'A}{\cos i_m}$$

Comme AI = AI', alors MA = M'A

3. Propriétés dispersives du prisme. Spectroscopes à prismes

3.1. Phénomène de dispersion de la lumière

Lorsque la lumière est polychromatique, chacune des radiations monochromatiques qui la composent est déviée d'un angle D_i qui dépend de l'indice du milieu et donc de la longueur d'onde λ_i.

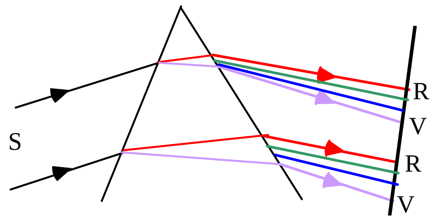
Le phénomène de dispersion d'une lumière polychromatique est la décomposition de cette lumière en ses différentes composantes monochromatiques.

La dépendance de n en fonction de λ est donnée, en première approximation, par la relation de Cauchy :

$$n = n_0 + \frac{A}{\lambda^2}$$

où n_0 et A sont des constantes positives.

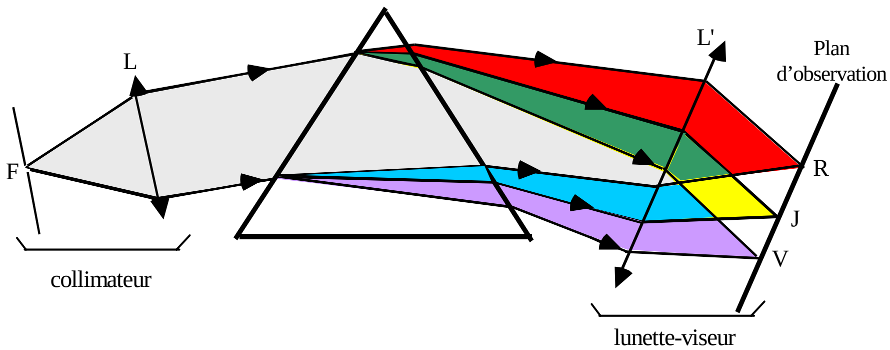
Ainsi lorsqu'on fait tomber sur le prisme un faisceau parallèle de lumière blanche on obtient à la sortie sur un écran une tache présentant diverses colorations provenant des diverses radiations monochromatiques composant cette lumière. Ces radiations sont inégalement déviées, la rouge étant moins déviée que la violette.



Les différentes radiations observées se recouvrent en partie sur l'écran.

Pour les distinguer, il faut que chaque point de l'écran ne reçoive de rayons que d'une seule radiation. Pour ce faire on utilise un *spectroscope à prisme* :

Une fente source S est placée dans le plan focal d'un objectif L avec lequel elle constitue un *collimateur*. Celui-ci fournit un faisceau de rayons parallèles qui est dispersé par le prisme. Un objectif L' donne dans son plan focal des images de la fente source présentant les différentes couleurs existant dans la lumière provenant de la source. C'est le *spectre de la lumière* émise par S.



Pour réaliser les conditions de stigmatisme approché et obtenir des images nettes de la fente source, il est préférable de se placer au minimum de déviation du prisme. Dans ces conditions :

$$\sin\frac{A + D_m}{2} = n \sin\frac{A}{2}$$

Deux radiations λ et $\lambda + d\lambda$ auxquelles correspondent les indices n et n + dn, donnent à la sortie du prisme deux faisceaux faisant entre eux un angle dD donné par :

$$dD = \frac{2\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A + D_m}{2}}\, dn = \frac{2\sin r_m}{\cos i_m}\, dn = \frac{2\,\frac{\sin i_m}{n}}{\cos i_m}\, dn = 2\,\frac{\operatorname{tg} i_m}{n}\, dn$$

3.2. Dispersion angulaire

On définit la dispersion angulaire d du spectroscope par le rapport de l'angle dD à la variation $d\lambda$ de la longueur d'onde :

$$d = \frac{dD}{d\lambda} = \frac{dD}{dn}\,\frac{dn}{d\lambda}$$

Au minimum de déviation :

$$\frac{dD}{dn} = \frac{2\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A + D_m}{2}}\, dn = \frac{2\sin\frac{A}{2}}{\cos i_m}$$

donc :

$$\boxed{d = \frac{dD}{d\lambda} = \frac{2\sin\frac{A}{2}}{\cos i_m}\,\frac{dn}{d\lambda}}$$

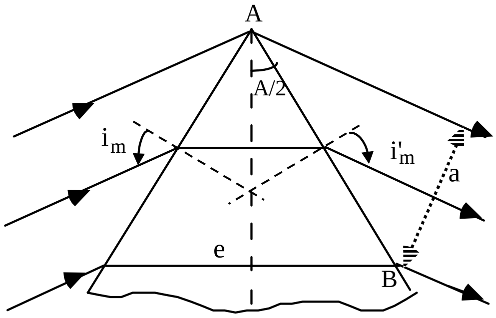
Dans la pratique il est plus simple d'évaluer cette variation en fonction de la largeur "a" du faisceau émergent au minimum de déviation et de la plus grande longueur "e" du trajet de la lumière dans le prisme.

On a en effet :

$$\frac{dD}{dn} = \frac{2\sin\frac{A}{2}}{\cos i_m} = \frac{2\,AB\sin\frac{A}{2}}{AB\cos i_m} = \frac{e}{a}$$

On aura alors pour la dispersion angulaire :

$$\boxed{d = \frac{dD}{d\lambda} = \frac{e}{a}\,\frac{dn}{d\lambda}}$$



Remarques :

1- La formule précédente donnant la dispersion angulaire suppose que le faisceau incident passe par le sommet du prisme. S'il n'en est pas ainsi, on doit remplacer e par e - e' où e' est la longueur du trajet de la lumière qui est proche du sommet du prisme.

2 - On peut augmenter la dispersion en utilisant plusieurs prismes placés au minimum de déviation (train de prismes). La dispersion obtenue est alors la somme des différentes dispersions.

3 - Pour rendre compte des performances dispersives d'un prisme pour la lumière blanche, on utilise souvent la notion de **pouvoir dispersif** défini par

$$K = \frac{n_V - n_R}{n_J - 1}$$

où n_V, n_R, n_J représentent les indices du verre pour les radiations violette, rouge et jaune.

3.3. Pouvoir de résolution

On définit le pouvoir de résolution par le rapport :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

où $\Delta\lambda$ est le plus petit écart en longueur d'onde détectable dans le plan d'observation.

On peut montrer que si la fente source est suffisamment mince le pouvoir de résolution du prisme s'écrit :

$$R = e\frac{dn}{d\lambda}$$

Ainsi, pour séparer le doublet du sodium $\Delta\lambda = 6$ Å pour $\lambda \approx 5890$ Å , il faut que le pouvoir de résolution du spectroscope soit supérieur à

$$R = \frac{5890}{6} \approx 1000$$

Exercices et problèmes

EP.6.1. : Prisme de petit angle A

Un prisme d'indice n et de petit angle A, placé dans l'air est éclairé par un faisceau de lumière parallèle sous un faible angle d'incidence i.

1. Montrer que le faisceau émergent fait avec le faisceau incident un angle D = (n – 1) A.

2. Calculer la déviation subie par deux rayons qui font, à l'entrée, l'angle d'incidence i = 3°, l'un au-dessous, l'autre au-dessus de la normale.

On donne : A = 6° ; n = $\frac{3}{2}$

Solution

1. On a : $D = i + i' - A$

et $A = r + r'$

Pour des angles petits, on a également :

$i = n\,r$

$i' = n\,r'$

soit : $D = n\,(r + r') - A = n\,A - A = (n - 1)\,A$

2. La déviation est la même dans les deux cas . Elle est égale à

$D = (n - 1)\,A = 3°$

On peut retrouver ce résultat en suivant la marche de chacun des rayons et en calculant les différents angles :

- Pour le premier rayon, on a $i = +\,3°$

$r = \frac{i}{n} = 2°$

$r' = A - r = 4°$

$i' = n\,r' = 6°$

$D = i + i' - A = 3°$

- Pour le deuxième rayon, on $i = -\,3°$

$r = -\,2°$

$r' = A - r = 8°$

$i' = n\,r' = 12°$

$D = i + i' - A = 3°$

EP.6.2. : Marche d'un rayon lumineux dans un prisme

Un prisme d'angle A et d'indice n = 1,5 est éclairé par un rayon incident perpendiculaire à la face d'entrée du prisme.

Tracer la marche du rayon lumineux et calculer la déviation D dans les deux cas suivants :

1- A = 30°

2- A = 60°

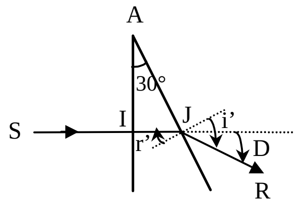
Solution

L'angle d'incidence i étant nul, l'angle r est également nul. On a donc : r' = A

1- A = r' = 30°

L'angle i' est alors donné par :

sin i' = n sinr' = n sin A = 0,75 soit i' = 48°,6



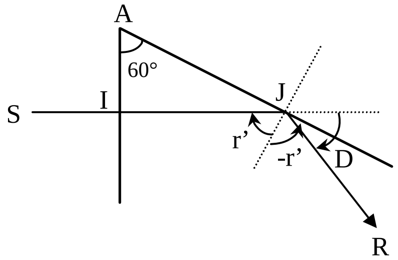
La déviation est : D = i' – r' = 18°,6

2- A = r' = 60°

Calculons l'angle critique d'incidence sur la deuxième face :

$$\sin\lambda = \frac{1}{n} = \frac{2}{3} = 0{,}667 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 41°{,}8$$

r' étant supérieur à λ, le rayon subit une réflexion totale en J



La déviation est : D = π - 2r' = 60°

EP.6.3. : Prismes accolés

On accole deux prismes, de sommets A et A' et d'indices n et n' respectivement.

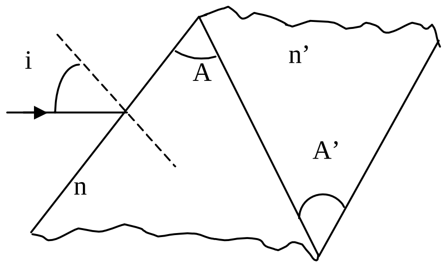
1. Tracer la marche d'un rayon lumineux incident à travers les deux prismes.

2. On considère un rayon incident correspondant au minimum de déviation pour le premier prisme (A,n) supposé seul, calculer la valeur de l'angle A' du second prisme pour que l'angle d'émergence final soit égal à 45°.

On donne : A = 60 ° ; n = $\sqrt{2}$; n'= 1,5 .

3. On se place maintenant dans la situation où les deux prismes sont identiques (A=A' = 60 ° ; n = n'= $\sqrt{2}$).

Déterminer la position du rayon émergent par rapport au rayon incident correspondant au minimum de déviation.



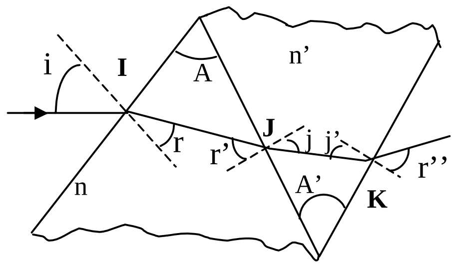
Solution

1. Les angles vérifient les relations suivantes :

$A = r + r'$; $A' = j + j'$

Les relations de Descartes entre les angles en I, J et K sont données par :

$\sin i = n \sin r$; $n \sin r' = n' \sin j$; $n' \sin j' = \sin r''$



2. Soit i_m l'angle correspondant au minimum de déviation pour le premier prisme supposé seul . Dans ce cas, on a

$$i = i_m \text{ et } r = r' = \frac{A}{2} = 30°$$

et par suite : $\sin i_m = n \sin\frac{A}{2}$. d'où $i_m = 45°$.

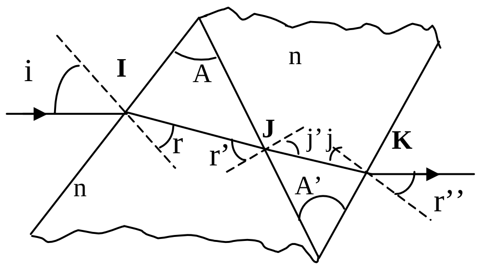
En J, on a : $n \sin r' = n' \sin j$. Donc $j = 28{,}12\ °$

En K, on a : $\sin r'' = \sin 45° = n' \sin j'$. d'où $j' = 28{,}12\ °$.

Sachant que $A' = j + j'$, on trouve alors : $A' = 56{,}25°$.

3. $A = A' = 60°$ et $n = n' = \sqrt{2}$ **,** $i = i_m = 45°$ et $r = r' = 30\ °$.

Sur la face commune aux deux prismes, le rayon ne subit aucune déviation du fait que n = n' et par suite r' = j et r''= 45°. Ce résultat est prévisible car les deux prismes associés sont équivalents à une lame à faces parallèles et dans ce cas, le rayon subit seulement un déplacement latéral sans déviation.



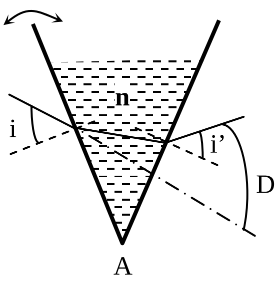
EP.6.4. : Prisme à liquide

Un prisme à liquide d'indice n et d'angle A donne une déviation D pour un angle d'incidence i. On fait tourner la face d'entrée du prisme d'un petit angle ε en diminuant l'angle A.

De quel angle et dans quel sens tourne le rayon émergeant ?

On donne : A = 60 ° ; n = 1,33 ; i = 30° et ε = 0,5 °.

Solution



La déviation D est une fonction croissante de l'angle A. Donc D diminue si A diminue.

Rappelons les relations entres les angles i, i', r, r', A et D :

sin i = n sin r ; sin i' = n sin r' ;

A = r + r' ; D = i + i' - A

En différentiant, on trouve la relation $\frac{dD}{dA} = \frac{di'}{dr'} - 1 = \frac{n \cos r'}{\cos i'} - 1$.

D'où : $\Delta D = \left(\frac{n \cos r'}{\cos i'} - 1 \right) \Delta A$.

Sachant que $\Delta A = -\varepsilon = -0{,}5$ °, on trouve : $\Delta D = -0{,}41°$

EP.6.5. : Angle limite d'incidence

On considère un prisme de sommet A = 60° et d'indice n = $\sqrt{3}$.

1- Déterminer l'angle limite d'incidence i_0 du prisme.

2- Déterminer les angles d'incidence i_m et de déviation D_m au minimum de déviation.

Solution

1- L'angle limite d'incidence i_0 correspond à un angle de réfraction sur le dioptre d'entrée égal à : r = A - λ avec sin λ =. $\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ⇒ λ = 35°,3

On a donc :

$\sin i_0 = n \sin (A - \lambda) = \sqrt{3} \sin (24°{,}7)$ ⇒ $i_0 = 46°{,}4$

2- Au minimum de déviation, l'angle i_m est tel que :

$\sin i_m = n \sin \frac{A}{2} = n \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ⇒ $i_m = 60°$

L'angle de déviation minimum D_m est donné par :

$D_m = 2\, i_m - A = 60°$

EP.6.6. : Déviation minimum

Un prisme en verre d'indice n = 1,5, a pour section droite un triangle équilatéral.

1- Déterminer l'angle de déviation minimum D_m lorsque le prisme est placé dans l'air d'indice n_0 = 1.

2- Quelle est la valeur de l'angle de déviation minimum D'_m lorsque le prisme est plongé dans l'eau d'indice n_1 = 4/3 ?

Solution

1- On a :

$$n = \frac{\sin \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

d'où : $D_m = 2 \text{ Arc sin } (n \sin \frac{A}{2}) - A$ soit $D_m = 37°,2$

2- Il suffit de remplacer dans les relations n par $\frac{n}{n_1}$:

on aura : $D'_m = 2 \text{ Arc sin } (\frac{n}{n_1} \sin \frac{A}{2}) - A$ d'où $D'_m = 8°,3$

EP.6.7. : Variation de la déviation avec l'angle d'incidence

Un prisme de verre de section principale ABC rectangle en B et dont l'angle A vaut 75° est placé dans l'air.

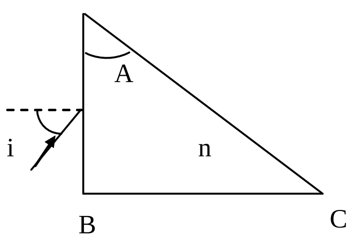
Un rayon lumineux monochromatique SI pour lequel le verre employé a pour indice n = 1,6328, arrive en I sur la face AB sous l'incidence i au-dessous de la normale.

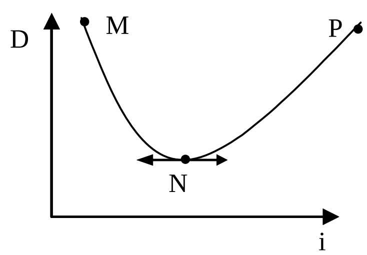
1. Rappeler la condition sur l'angle i pour que le rayon émerge par la face AC.

2. La variation de la déviation D en fonction de l'angle d'incidence i a l'allure représentée sur la figure ci-dessous.

Donner les coordonnées des points M, N et P.

Tracer la marche du rayon lumineux pour les angles d'incidence correspondants aux points M , N , et P.





Solution

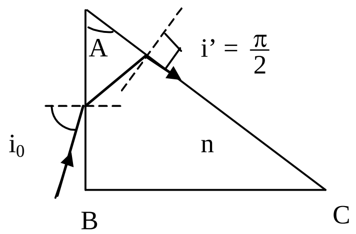
1. Rappelons les relations entres angles i, i', r, r',A et D :
$\sin i = n \sin r$; $\sin i' = n \sin r'$; $A = r + r'$; $D = i + i' - A$

Pour que le rayon émerge du prisme, il faut que r' vérifie l'inégalité r' $\leq \lambda$ où λ est l'angle critique d'incidence avec $\sin\lambda = \frac{1}{n}$. r vérifie donc l'inégalité r $\geq A - \lambda$ et par suite i vérifie la condition sin i $\geq$ n sin $(A-\lambda)$.

Pour que le rayon émerge par la face AC, l'angle d'incidence i doit vérifier l'inégalité : $i_0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}$ où i_0 est donné par la relation $\sin i_0 = n \sin(A - \lambda)$. On trouve $i_0 = 81{,}1°$.

2.a. Le point M correspond à l'angle $i = i_0 = 81{,}1°$ et à une émergence rasante (i'= 90°).

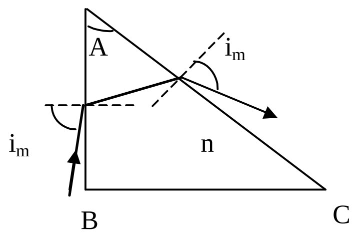
Dans ce cas, $D = i_0 + 90° - A = 96{,}1°$.



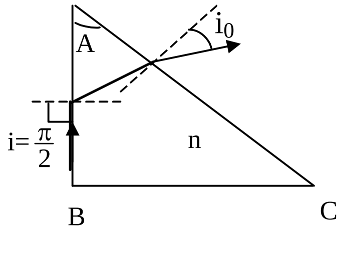
2.b. Le point N correspond à la déviation minimale pour laquelle :

$$i = i' = i_m,\ r = r' = \frac{A}{2} \text{ et } D = D_m = 2\,i_m - A.$$

Sachant que $\sin i_m = n \sin\frac{A}{2}$, on trouve $i_m = 83{,}7°$ et $D_m = 92{,}4°$.



2.c.Le point P correspond à une incidence rasante i = 90°. Dans ce cas,
$i' = i_0 = 81{,}1°$ et $D = i_0 + 90° - A = 96{,}1°$.



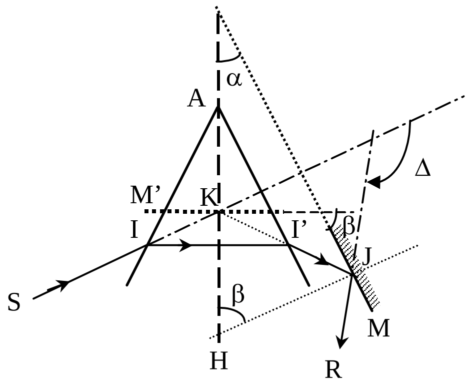
EP.6.8. : Association d'un prisme et d'un miroir

Un rayon de lumière monochromatique traverse la section droite d'un prisme au minimum de déviation. Le rayon émergent est réfléchi par un miroir plan parallèle à la face de sortie du prisme.

Déterminer l'angle de déviation du rayon à la sortie du système prisme-miroir.

Solution

Au minimum de déviation, le trajet du rayon lumineux dans le prisme est symétrique par rapport au plan bissecteur du dièdre A.



Dans ce cas le prisme se comporte comme un miroir plan M' perpendiculaire en K (point d'intersection des rayons incident et émergent) à AK.

L'ensemble prisme-miroir M est équivalent à deux miroirs M et M' faisant entre eux un angle β.

L'angle de déviation Δ introduit par le système est donc égal à :

$$\Delta = 2\beta = \pi - 2\alpha$$

α étant l'angle du dièdre formé par le plan du miroir M et le plan bissecteur du dièdre A.

EP.6.9. : Image donnée par un prisme

Soit un prisme P d'indice n = 1,5 placé dans l'air. Ce prisme a pour section principale un triangle ABC rectangle en B, d'angle au sommet A = 10^{-2} rad et de coté AB = 1 cm.

Une source S ponctuelle et monochromatique est placée sur la droite BC du coté de B tel que SB = 1 m.

1. Calculer la déviation D introduite par ce prisme.

2. Tracer la marche des rayons incidents SB et SA.

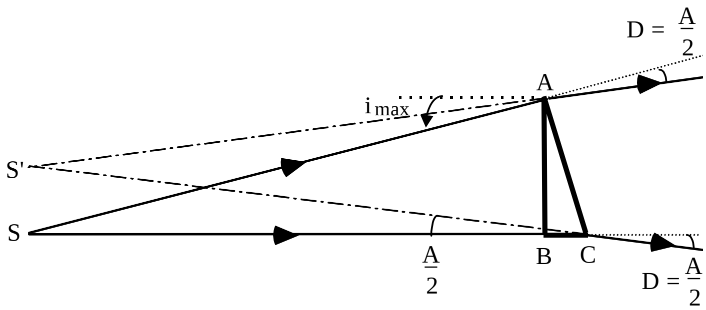
3. Déterminer la position de S' image de S à travers ce prisme.

Solution

1. Calcul de la déviation D :

$$D = (n - 1)\,A = (1{,}5 - 1).10^{-2}\ \text{rad} = \frac{10^{-2}}{2}\ \text{rad} = \frac{A}{2}$$

2. Marche des rayons incidents SB et SA :



3. Position de S' image de S :

$$SS' = SB\ \text{tg}\frac{A}{2} = SB.\frac{A}{2} = 1.\frac{10^{-2}}{2} = \frac{1}{2}\ \text{cm} = 5\ \text{mm} = \frac{AB}{2}$$

EP.6.10. : Variation de la déviation avec la longueur d'onde

Un prisme taillé dans un verre spécial (flint), d'angle A = 60°, a pour indices n_R = 1,62 pour le rouge et n_V = 1,66 pour le violet.

Déterminer les déviations pour ces radiations lorsque le prisme est éclairé par un rayon de lumière blanche faisant un angle d'incidence de 45°.

Solution

On a : $\sin i = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Pour le rayon rouge :

$$\sin r = \frac{1}{n_1}\sin i = \frac{1}{1{,}62}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}436 \quad \Rightarrow \quad r = 25°{,}8$$

$r' = A - r = 34°{,}2 \quad \Rightarrow \quad \sin r' = 0{,}562$

$\sin i' = n_1 \sin r' = 0{,}910 \quad \Rightarrow \quad i' = 65°{,}5$

soit : $D_R = i + i' - A = 50°{,}5$

Pour le rayon violet :

$\sin r = \frac{1}{n_2} \sin i = \frac{1}{1,66} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,426 \quad \Rightarrow \quad r = 25°,2$

$r' = A - r = 34°,8 \quad \Rightarrow \quad \sin r' = 0,571$

$\sin i' = n_2 \sin r' = 0,948 \quad \Rightarrow \quad i' = 71°,5$

soit : $D_V = i + i' - A = 56°,5$

L'angle des rayons extrêmes à la sortie est donc de 6°

EP.6.11. : Etude de la dispersion d'un prisme

On place un prisme d'angle A = 60° sur le plateau d'un goniomètre.

On réalise une série de mesures en repérant le minimum de déviation pour les longueurs d'onde des raies du mercure et du sodium. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

λ (Å)	**D_m**	**n**
6160	55° 30'	
5790	56° 04'	
5770	56° 06'	
5461	56° 40'	
4960	57° 51'	
4358	59° 51'	
4078	61° 10'	
4047	61° 20'	

1- Compléter le tableau en calculant les indices correspondants.

2- Tracer la courbe expérimentale n = f(λ).

3- Vérifier graphiquement la loi empirique de Cauchy : $n = a + \frac{b}{\lambda^2}$ et déterminer les valeurs de a et b.

Solution

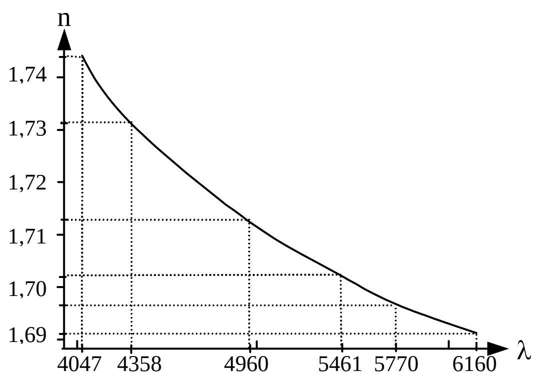
1- Les valeurs des indices correspondants sont données par :

$$n = \frac{\sin \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

Soit pour les diverses radiations :

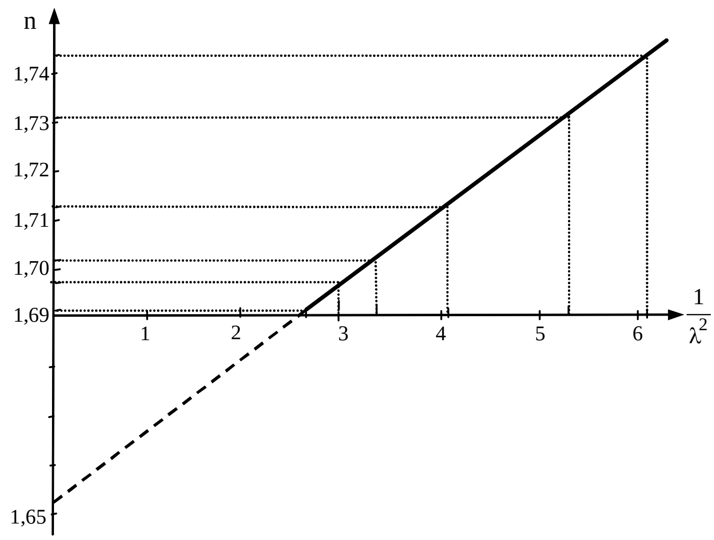
λ (Å)	D_m	n	$\frac{1}{\lambda^2}$ (μm^{-2})
6160	55° 30’	1,691	2,64
5790	56° 04’	1,697	2,98
5770	56° 06’	1,697	3,00
5461	56° 40’	1,702	3,35
4960	57° 51’	1,713	4,06
4358	59° 51’	1,731	5,27
4078	61° 10’	1,742	6,01
4047	61° 20’	1,744	6,11

2- Courbe n = f(λ)



C’est une courbe décroissante.

3- Loi empirique de Cauchy



La courbe $n = f\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ est une droite : la loi de Cauchy est vérifiée avec

$a = 1,652$ et $b = 1,5.10^{-2}\ \mu m^2$

CHAPITRE 7

SYSTEMES OPTIQUES SIMPLES A FACES SPHÉRIQUES

Les systèmes optiques à faces sphériques présentent un grand intérêt dans l'instrumentation optique à cause de la variété des images qu'ils permettent d'obtenir et du grossissement des objets qu'ils permettent d'atteindre. Couplés à des systèmes plans, ils interviennent dans de nombreux appareils de mesure et d'exploration.

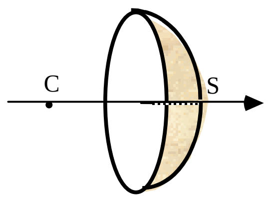
Parmi les systèmes à faces sphériques, le miroir et le dioptre sont des éléments essentiels et leur étude est à la base de tous les systèmes centrés.

On va étudier les conditions de stigmatisme rigoureux et approché de ces éléments. On établira ensuite les relations de conjugaison qui donnent les positions de l'image par rapport à celles des objets à partir de leurs caractéristiques fondamentales qui sont : les foyers, les distances focales, la vergence, etc….. On présentera enfin quelques exemples de construction d'images de petits objets perpendiculaires à l'axe de ces systèmes et on définira le grandissement linéaire qui est essentiel pour l'utilisation de ces éléments.

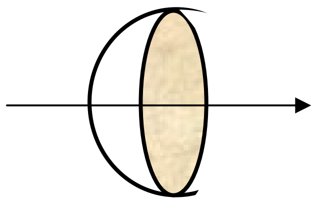
1. Le miroir sphérique

Un miroir sphérique est une portion de surface sphérique de ***centre*** **C** rendue réfléchissante par un dépôt métallique.

C'est donc une calotte sphérique de ***sommet*** **S** et de rayon R = $\overline{SC}$. La droite CS représente l'axe principal du miroir.

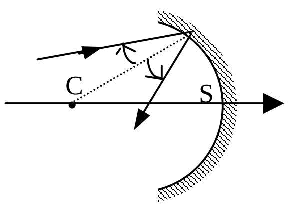


miroir concave

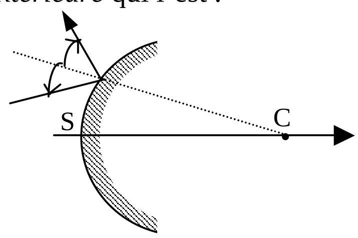


miroir convexe

Le miroir est dit ***concave*** lorsque la *surface intérieure* est réfléchissante et il est dit ***convexe*** lorsque c'est la *surface extérieure* qui l'est .



miroir concave



miroir convexe

1.1- Stigmatisme du miroir sphérique

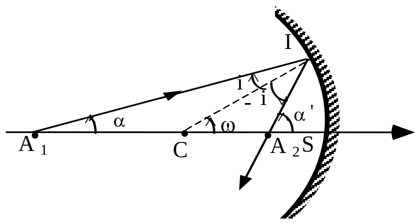
Remarquons, tout d'abord, que le stigmatisme rigoureux est réalisé dans deux cas :

- lorsque le point objet est situé au centre C du miroir car tout rayon issu de C est normal au miroir et se réfléchit sur lui-même,
- lorsque le point objet appartient à la surface du miroir. Ce cas est sans intérêt.

1.1.1. Conditions de stigmatisme

Considérons un rayon lumineux issu d'un point objet A_1 sur l'axe principal ; il se réfléchit en I sur le miroir et coupe l'axe en A_2 qui, s'il y a stigmatisme, serait l'image de A_1 .

On note ω l'angle que fait la normale en I au miroir et l'axe de celui-ci



Appliquons la loi des sinus dans les triangles CA_1I et CA_2I :

$$\frac{CA_1}{\sin i} = \frac{IA_1}{\sin(\pi-\omega)} = \frac{IA_1}{\sin\omega} = \frac{CI}{\sin\alpha}$$

et
$$\frac{CA_2}{\sin i} = \frac{IA_2}{\sin\omega} = \frac{CI}{\sin\alpha'}$$

avec : $\omega = \alpha - i$ ou $\alpha = \omega + i$ et $\alpha' = \omega - i$

En écrivant les relations précédentes en valeur algébrique, on obtient les deux relations :

$$\frac{\sin i}{\overline{CA_1}} = \frac{\sin\alpha}{\overline{CI}}$$

et
$$\frac{\sin(-i)}{\overline{CA_2}} = \frac{\sin\alpha'}{\overline{CI}} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin i}{\overline{CA_2}} = -\frac{\sin\alpha'}{\overline{CI}}$$

Effectuons la somme membre à membre de ces deux relations :

$$\frac{\sin i}{\overline{CA_1}} + \frac{\sin i}{\overline{CA_2}} = \frac{\sin\alpha}{\overline{CI}} - \frac{\sin\alpha'}{\overline{CI}}$$

soit : $\sin i \left(\frac{1}{\overline{CA_1}} + \frac{1}{\overline{CA_2}} \right) = \frac{1}{\overline{CI}} \left(\sin(\omega + i) - \sin(\omega - i) \right)$

$$\sin i \left(\frac{1}{\overline{CA_1}} + \frac{1}{\overline{CA_2}} \right) = \frac{1}{\overline{CI}} 2 \sin i \cos \omega$$

ou encore : $$\frac{1}{\overline{CA_1}} + \frac{1}{\overline{CA_2}} = \frac{2 \cos \omega}{\overline{CS}} \qquad (1)$$

Posons : $\overline{CA_1} = z$, $\overline{CA_2} = z'$; $\overline{CI} = \overline{CS} = \rho$

La relation (1) s'écrit alors : $$z' = \frac{\rho z}{2 z \cos \omega - \rho} \qquad (2)$$

Pour une valeur donnée de z, **z' dépend de** ω : la position de A_2, image de A, dépend donc de la position du point d'incidence I.

1.1.2. Stigmatisme rigoureux

* Pour z = 0, on a z' = 0 : on a donc stigmatisme rigoureux lorsque A_1 est en C .

* Si le point objet A_1 est sur le miroir, CA_1 et CI sont confondus, donc $z = \rho$, $\omega = \alpha$ et $i = 0$, ce qui entraîne $\alpha' = \omega = \alpha$, soit, d'après la loi des sinus, $\overline{CA_1} = \overline{CA_2}$ et le point A_2 est confondu avec le point A_1 .

On retrouve donc les deux cas de stigmatisme rigoureux.

1.1.3. Stigmatisme approché

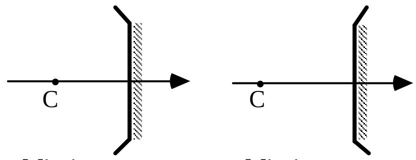
* Si ***A_1* est voisin du centre *C*** , alors $z = \varepsilon$ (avec ε petit devant ρ) et dans l'équation (2) $2\varepsilon \cos \omega$ est négligeable devant ρ quel que soit ω : **un miroir sphérique est donc approximativement stigmatique pour les points voisins du centre C et cela quelle que soit l'inclinaison des rayons sur l'axe** .

Le stigmatisme approché est donc réalisé lorsqu'on se place au voisinage des conditions de stigmatisme rigoureux.

* Si ***ω* est petit** , cos ω peut être considéré comme constant et égal à 1 et à chaque valeur de z correspond une valeur de z' : $z' = \frac{\rho z}{2z - \rho}$

Un miroir sphérique est donc approximativement stigmatique pour des rayons para axiaux c'est-à-dire dans les conditions de l'approximation Gauss.

Par la suite, pour indiquer que seule la portion voisine de l'axe d'un miroir sphérique est utilisée dans les conditions de stigmatisme approché, nous représenterons le miroir par une partie rectiligne perpendiculaire à l'axe optique, comme indiqué sur la figure ci-après :



Miroir concave   Miroir convexe

1.2. Relations de conjugaison

Ces formules sont constituées, d'une part, des relations entre les positions de l'objet et de l'image et, d'autre part, des relations entre les valeurs algébriques des dimensions de l'objet et de l'image.

1.2.1. Relation entre les positions de l'objet et de l'image

1.2.1.1. Origine au centre

Dans les conditions de l'approximation de Gauss , ω petit et cos ω ≈ 1, la relation (1) s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{CA_1}} + \frac{1}{\overline{CA_2}} = \frac{2}{\overline{CS}} \qquad (3)$$

1.2.1.2. Origine au sommet

Introduisons dans le premier membre de la relation (3) le sommet S :

$$\frac{1}{\overline{CS}+\overline{SA_2}} + \frac{1}{\overline{CS}+\overline{SA_1}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

soit : $\left((\overline{CS}+\overline{SA_1}) + (\overline{CS}+\overline{SA_2})\right)\overline{CS} = 2\,(\overline{CS}+\overline{SA_1}).(\overline{CS}+\overline{SA_2})$

Développons et simplifions cette expression, il vient :

$$\overline{SA_1}\,.\,\overline{CS} + \overline{CS}\,.\,\overline{SA_2} = 2\,\overline{SA_1}\,.\,\overline{SA_2}$$

Divisons les deux membres par $\overline{SA_1}\,.\,\overline{SA_2}\,.\,\overline{CS}$. On obtient :

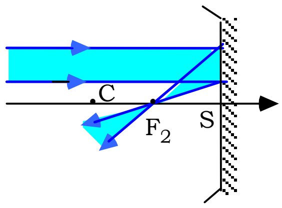
$$\frac{1}{\overline{SA_1}} + \frac{1}{\overline{SA_2}} = \frac{2}{\overline{SC}} : \qquad (4)$$

Cette relation est connue sous le nom de "**Formule de Descartes** "

1.3. Foyers. Distance focale. Vergence Formule de Newton

1.3.1. Position des foyers :

D'après la définition du foyer image F_2, la position de celui-ci dans le cas d'un miroir sphérique est obtenue en écrivant que $\overline{SA_1} \to \infty$, soit $\dfrac{1}{\overline{SA_1}} \to 0$.

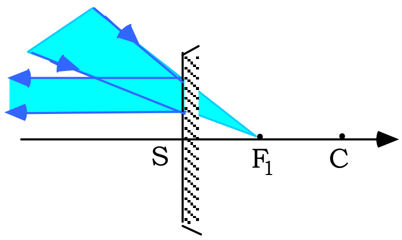


On aura donc :

$$\mathbf{\overline{SF_2} = \frac{\overline{SC}}{2}}$$

Le foyer image F_2 d'un miroir sphérique est donc situé au milieu de SC.

De la même manière, on trouve la position du foyer objet F_1 en écrivant que $\overline{SA_2} \to \infty$ ou $\dfrac{1}{\overline{SA_2}} \to 0$,



soit :

$$\mathbf{\overline{SF_1} = \frac{\overline{SC}}{2}}$$

Le foyer objet F_1 d'un miroir sphérique est donc également situé au milieu de SC.

Les foyers objet et image d'un miroir sphérique sont confondus en F et situés au milieu de SC.

1.3.2. Distance focale et vergence

La distance focale f' est donnée par la distance $\overline{SF_2}$. On a :

$$f' = \overline{SF_2} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{R}{2}$$

La vergence est définie par : $C = \dfrac{n}{\overline{\overline{SF_2}}}$ où n est l'indice du milieu dans lequel se trouve le miroir.

La vergence d'un miroir sphérique est donc :

$$\mathbf{C = \frac{n}{\overline{\overline{SF_2}}} = \frac{n}{f'} = \frac{2n}{R}}$$

La vergence s'exprime en dioptrie (m^{-1}).

Dans le cas où le miroir est placé dans l'air (n = 1) on a :

$$C = \frac{1}{\overline{\overline{SF_2}}} = \frac{1}{f'} = \frac{2}{R}$$

La vergence est une grandeur algébrique. Le miroir est dit convergent lorsqu'elle est négative, et divergent si elle est positive.

1.3.3. Relation de conjugaison avec origine au foyer F. Formule de Newton

Remplaçons dans la relation (4) $\overline{CS}$ par $2\overline{SF}$ et introduisons F dans le premier membre de cette relation; il vient :

$$\frac{1}{\overline{\overline{SF} + \overline{FA_2}}} + \frac{1}{\overline{\overline{SF} + \overline{FA_1}}} = \frac{1}{\overline{\overline{SF}}}$$

soit : $\left((\overline{SF} + \overline{FA_1}) + (\overline{SF_1} + \overline{FA_2})\,\overline{SF} = (\overline{SF} + \overline{FA_1}).(\overline{SF} + \overline{FA_2})\right)$

Après développement et simplification, on obtient :

$$\mathbf{\overline{FA_1}\,.\,\overline{FA_2} = \overline{SF}^2 = \overline{FS}^2} \qquad (5)$$

qui est la **"Formule de Newton"**

1.4. Construction de l'image d'un petit objet perpendiculaire à l'axe

Pour effectuer cette construction, nous allons tirer profit des propriétés des foyers, du centre C et du sommet S et utiliser des rayons particuliers.

1.4.1. Rayons particuliers

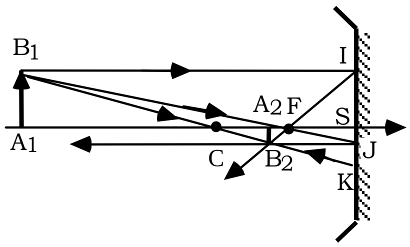
- Tout rayon incident passant par le centre C, se réfléchit sur lui-même,
- Tout rayon incident passant par le foyer objet F, se réfléchit parallèlement à l'axe,
- Tout rayon incident parallèle à l'axe, se réfléchit en passant par le foyer image F_2,
- Tout rayon incident en S, se réfléchit symétriquement à l'axe optique.

Remarquons que lorsque l'objet A_1B_1 est de petite dimension et que A_1 est situé sur l'axe, l'image A_2B_2 sera également perpendiculaire à l'axe avec A_2 sur l'axe. Il suffit donc de construire l'image B_2 de B_1.

1.4.2. Quelques constructions

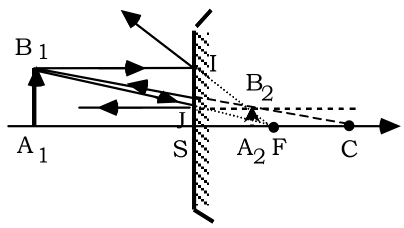
Objet A_1B_1 réel (placé avant F)

miroir concave :



L'image A_2B_2 est réelle mais de sens contraire à l'objet (image renversée)

miroir convexe :



L'image A_2B_2 est virtuelle et de même sens que l'objet (image droite)

1.4.3. Généralisation

Considérons un objet A_1B_1, de hauteur constante, placé dans différentes positions (de 1 à 6). Le rayon BI parallèle à l'axe (le même pour toutes les positions de l'objet), se réfléchit suivant la **direction fixe IF qui est donc le lieu des images B_2 de B_1.**

Pour chaque position de B_1, il suffit de tracer le rayon B_1C et l'intersection de ce rayon avec la droite IF correspond à B_2.

On **remarque** que :

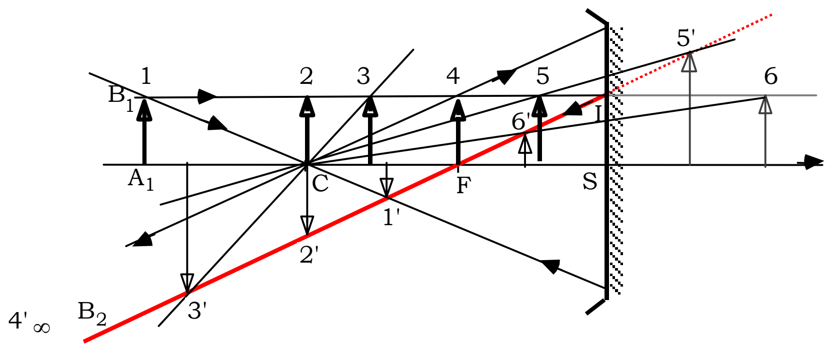
1- quel que soit le type de miroir, l'objet et l'image se déplacent en sens inverse avec une discontinuité au passage de l'objet par le foyer et se rencontrent au centre C et au sommet S,

2- un miroir concave ne donne jamais une image virtuelle d'un objet virtuel,

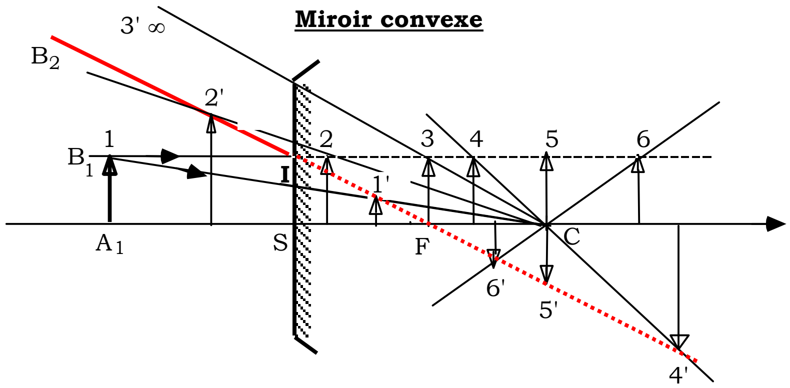
3- un miroir convexe ne donne jamais une image réelle d'un objet réel,

4- quel que soit le type de miroir, l'image est renversée quand elle est de même nature que l'objet et de même sens que l'objet quand elle est de nature différente.

Miroir concave



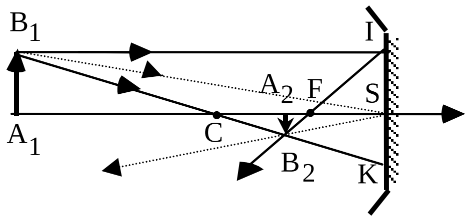
Miroir convexe



1.5. Grandissement linéaire transversal

Rappelons que le grandissement linéaire transversal γ représente le rapport des valeurs algébriques de la dimension de l'image à celle de l'objet.

1.5.1. Origine au centre



La similitude des triangles ABC et A_2B_2C donne en grandeur et en signe

$$\gamma = \frac{\overline{\mathbf{A_2B_2}}}{\overline{\mathbf{A_1B_1}}} = \frac{\overline{\mathbf{CA_2}}}{\overline{\mathbf{CA_1}}}$$

Si A_1 et A_2 sont de part et d'autre de C, alors l'image est renversée.

1.5.2. Origine au sommet

Si l'on considère les triangles A_1B_1S et A_2B_2S, on a :

$$\gamma = \frac{\overline{\mathbf{A_2B_2}}}{\overline{\mathbf{A_1B_1}}} = -\frac{\overline{\mathbf{SA_2}}}{\overline{\mathbf{SA_1}}}$$

1.5.3. Origine au foyer

Les triangles SIF et A_2B_2F étant semblables, on peut écrire :

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{FA_2}}{\overline{FS}}$$

d'où : $$\gamma = \frac{\overline{\mathbf{A_2B_2}}}{\overline{\mathbf{A_1B_1}}} = \frac{\overline{\mathbf{FA_2}}}{\overline{\mathbf{FS}}}$$

On a de même : $$\gamma = \frac{\overline{\mathbf{A_2B_2}}}{\overline{\mathbf{A_1B_1}}} = \frac{\overline{\mathbf{FS}}}{\overline{\mathbf{FA_1}}}$$

1.6. Champ d’un miroir sphérique

Nous avons vu que le champ d’un miroir désigne la région de l’espace que l’on peut voir à travers ce miroir à partir d’une position donnée O de l’œil et qu’il correspond donc à l’ensemble des points A susceptibles de donner un rayon réfléchi passant par O. Ce rayon semble provenir de l’image O’ de O donnée par le miroir. Le champ du miroir est alors délimité par le cône de sommet O’ s’appuyant sur le contour du miroir.

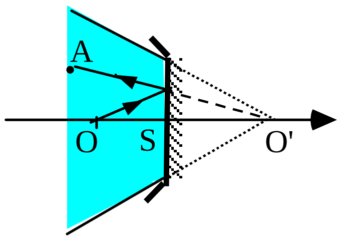
Dans la figure ci-après, nous avons comparé les champs d’un miroir sphérique concave, d’un miroir plan et d’un miroir sphérique convexe, l’observateur O occupant la même position devant les trois miroirs et les deux miroirs sphériques étant de même courbure.

La position de O est choisie de telle manière que, dans tous les cas, son image O’ soit virtuelle.

La position du point O’ est donnée par :

- pour le <u>miroir concave</u>

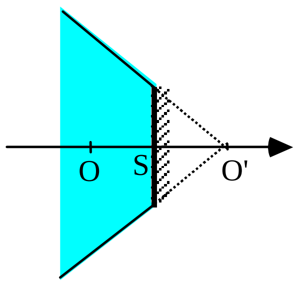
$$\overline{SO'} = \overline{SO}\,\frac{\overline{SF}}{\overline{SO} - \overline{SF}}$$



avec $\overline{SF} < 0$; $\overline{SO} < 0$ et $|\overline{SO}| < |\overline{SF}|$ puisque l’on est dans le cas d’une image virtuelle, d’où $|\overline{SO'}| = |\overline{SO}|\,\dfrac{|\overline{SF}|}{|\overline{SF} - \overline{SO}|}$

soit $\boxed{|\overline{SO'}| > |\overline{SO}|}$

* pour le <u>miroir plan</u> : $\boxed{|\overline{SO'}| = |\overline{SO}|}$



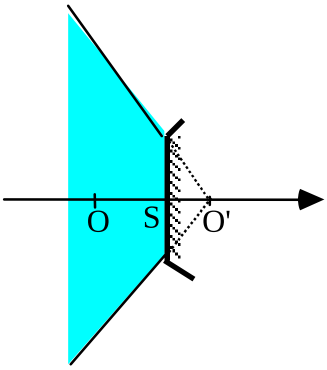
- pour le <u>miroir convexe</u> :

$$\overline{SO'} = \overline{SO}\,\frac{\overline{SF}}{\overline{SO} - \overline{SF}}$$

avec $\overline{SF} > 0$ et $\overline{SO} < 0$

d'où $|\overline{SO'}| = |\overline{SO}|\,\frac{\overline{SF}}{\overline{SF} + |\overline{SO}|}$

soit : $\boxed{|\overline{SO'}| < |\overline{SO}|}$



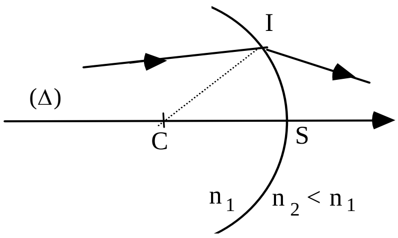
Le champ le plus grand est donc celui du miroir convexe, puis vient celui du miroir plan, puis enfin celui du miroir concave.

Ceci explique l'emploi de miroirs convexes comme rétroviseurs.

2. Le dioptre sphérique

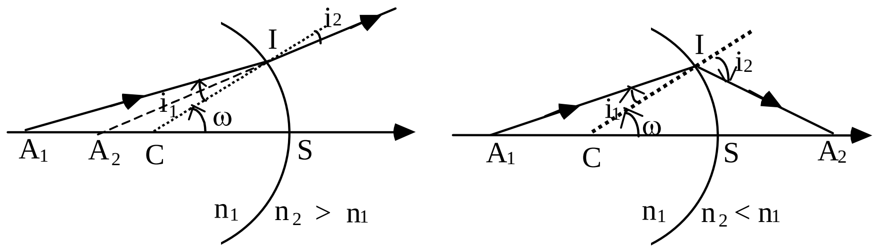
Un dioptre sphérique est une portion de surface sphérique réfringente séparant deux milieux homogènes et transparents d'indices différents.

Il est caractérisé par son axe Δ, son centre C, son rayon de courbure ρ, son sommet S et les indices n_1 et n_2 des deux milieux qu'il sépare



2.1. Invariant fondamental du dioptre

Soit un rayon lumineux incident A_1I issu d'un point objet A_1 situé sur l'axe. Selon que n_1 est supérieur ou inférieur à n_2, il lui correspond un rayon réfracté IT qui se rapproche ou s'éloigne de la normale IC mais dont le support coupe toujours l'axe en un point A_2.



Dans tous les cas de figures, les triangles CIA_1 et CIA_2 permettent d'écrire :

$$\frac{CA_1}{\sin i_1} = \frac{IA_1}{\sin \omega}$$

$$\frac{CA_2}{\sin i_2} = \frac{IA_2}{\sin \omega}$$

soit : $$\frac{CA_1}{IA_1 \sin i_1} = \frac{CA_2}{IA_2 \sin i_2}$$

et comme $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, on aura :

$$\mathbf{n_1 \frac{CA_1}{IA_1} = n_2 \frac{CA_2}{IA_2}} \qquad (6)$$

ce qui montre que la quantité $n \dfrac{CA}{IA}$ est invariante dans la traversée du dioptre sphérique : c'est un invariant fondamental qui est d'une grande importance dans l'étude des dioptres sphériques.

2.2. Stigmatisme du dioptre sphérique :

2.2.1. Stigmatisme rigoureux

Comme pour toutes les surfaces réfringentes ou réfléchissantes, il y a stigmatisme rigoureux pour les points de la surface mais ce cas est sans intérêt car l'image est confondue avec l'objet. Pour les surfaces sphériques, on a également stigmatisme rigoureux lorsque A_1 est confondu avec le centre C : les rayons issus de C traversent le dioptre sans déviation et le point C est sa propre image.

Mis à part ces cas, le stigmatisme rigoureux n'est réalisé que si la distance CA_2 est indépendante de l'angle ω.

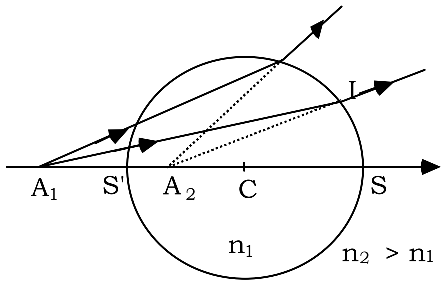
Comme on a $CA_2 = \frac{n_1}{n_2}\frac{IA_2}{IA_1} CA_1$, pour que CA_2 soit constant pour une position donnée A_1 de l'objet, il faut que le rapport $\frac{IA_2}{IA_1}$ le soit également.

Dans le cas où le point d'incidence I se déplace sur une sphère de diamètre SS', les deux points A_1 et A_2, tels que le rapport $\frac{IA_2}{IA_1}$ = k = Constante, existent : ils appartiennent à la droite SS' et vérifient la relation

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = - \frac{\overline{S'A_1}}{\overline{S'A_2}} = k = \frac{IA_1}{IA_2} .$$

Les points A_1 et A_2 qui sont conjugués par rapport à la sphère et qui réalisent le stigmatisme rigoureux sont uniques; ils.sont appelés "**points de Weïerstrass** ".

Pour trouver leur position, supposons que le point I est successivement en S ou en S'.



En utilisant des segments orientés, la relation (6) s'écrit :

$$\frac{\overline{SA_2}}{n_2\,\overline{CA_2}} = \frac{\overline{SA_1}}{n_1\,\overline{CA_1}} \qquad (7)$$

$$= - \frac{\overline{S'A_1}}{n_1\,\overline{CA_1}} \qquad (8)$$

En ajoutant membre à membre les relations (7) et (8), on obtient :

$$\frac{\overline{SA_2} + \overline{S'A_2}}{n_2\,\overline{CA_2}} = \frac{\overline{SA_1} - \overline{S'A_1}}{n_1\,\overline{CA_1}}$$

avec : $\overline{SA_2} + \overline{S'A_2} = \overline{SC} + \overline{CA_2} + \overline{S'C} + \overline{CA_2} = 2\,\overline{CA_2}$

$\overline{SA_1} - \overline{S'A_1} = \overline{SA_1} + \overline{A_1S'} = \overline{SS'} = 2\,\overline{SC}$

ce qui donne : $\dfrac{2\,\overline{CA_2}}{n_2\,\overline{CA_2}} = \dfrac{2\,\overline{SC}}{n_1\,\overline{CA_1}}$

soit $$\boxed{\overline{CA_1} = \frac{n_2}{n_1}\,\overline{SC}}$$

En retranchant membre à membre les relations (7) et (8) et en suivant la même démarche que précédemment, on obtient également :

$$\boxed{\overline{CA_2} = \frac{n_1}{n_2}\,\overline{SC}}$$

On remarque que le produit des relations précédentes conduit à :

$$\overline{CA_1}\,.\,\overline{CA_2} = \overline{SC}^2 = \overline{S'C}^2$$

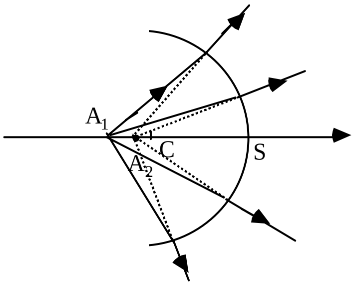
2.2.2. Stigmatisme approché :

Comme dans le cas général on a $\dfrac{CA_2}{CA_1} = \dfrac{n_1}{n_2}\dfrac{IA_2}{IA_1}$, le stigmatisme approché est vérifié lorsque le rapport $\dfrac{IA_2}{IA_1}$ ne subit que des variations négligeables lorsque le point d'incidence I décrit la surface utile du dioptre. Nous allons examiner successivement les cas où les points sont voisins du centre et où ils sont à une distance quelconque.

* Points voisins du centre

Lorsque CA_1 est très petit devant le rayon ρ du dioptre, il en sera de même pour CA_2 ; IA_1 et IA_2 se confondent alors pratiquement avec IC de sorte que leur rapport est voisin de l'unité. On aura :

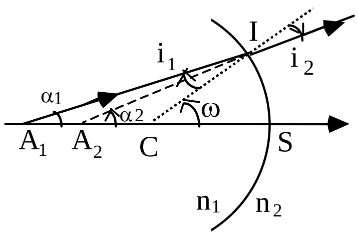
$$\frac{CA_2}{CA_1} \approx \frac{n_1}{n_2} \quad (\text{avec } \; CA_1 \ll CS\,)$$



Il y a donc stigmatisme approché même pour une valeur quelconque de ω et le dioptre peut avoir une grande ouverture.

* Points à une distance quelconque

Dans ce cas, il est nécessaire de réduire la portion utile du dioptre à une petite calotte sphérique d'axe CA_1.



Posons : $\overline{CA_1} = z_1$

$\overline{CA_2} = z_2$

$\overline{CS} = \rho$

Dans le triangle IA_1C on a :

$$\overline{IA_1}^{\,2} = \overline{CA_1}^{\,2} + \overline{CI}^{\,2} - 2\,\overline{CA_1}\,.\,\overline{CI}\cos\omega$$
$$= z_1^2 + \rho^2 - 2\rho z_1 \cos\omega$$

Comme l'angle ω est petit, on peut écrire : $\cos\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2}$, ce qui donne :

$$\overline{IA_1}^{\,2} = \rho^2 + z_1^2 - 2\rho z_1\left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right) = \rho^2 + z_1^2 - 2\rho z_1 + \rho z_1 \omega^2$$
$$= (z_1 - \rho)^2 + \rho z_1 \omega^2$$
$$= (z_1 - \rho)^2\left(1 + \frac{\rho z_1 \omega^2}{(z_1 - \rho)^2}\right)$$

soit, au premier ordre : $IA_1 = | z_1 - \rho | \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho z_1 \omega^2}{(z_1 - \rho)^2} \right)$

Comme IA_1 et SA_1 sont portés par des droites voisines, on peut les orienter de la même manière et on aura :

$$\overline{SA_1} = \overline{SC} + \overline{CA_1} = z_1 - \rho$$

et $$\overline{IA_1} = (z_1 - \rho) + \frac{1}{2} \frac{\rho z_1 \omega^2}{z_1 - \rho}$$

soit : $$\overline{IA_1} - \overline{SA_1} = \frac{1}{2} \frac{\rho z_1 \omega^2}{z_1 - \rho}$$

relation valable quelle que soit la position du point A_1 et qui montre que la différence $\overline{IA_1} - \overline{SA_1}$ est du deuxième ordre en ω et IA_1 se confond alors pratiquement avec SA_1 .

On a de même : $\overline{IA_2} - \overline{SA_2} = \frac{1}{2} \frac{\rho z_1 \omega^2}{z_2 - \rho}$

et IA_2 se confond pratiquement avec SA_2.

En conclusion, on peut admettre que, à des termes du second ordre près, $\overline{CA_2}$ reste constant lorsque I varie de façon que ω reste petit, c'est-à-dire lorsqu'on se place dans les conditions de l'approximation de Gauss avec des rayons para axiaux.

L'invariant fondamental s'écrit alors :

$$\mathbf{n_1} \frac{\overline{\mathbf{CA_1}}}{\overline{\mathbf{SA_1}}} = \mathbf{n_2} \frac{\overline{\mathbf{CA_1}}}{\overline{\mathbf{CA_2}}} \qquad (9)$$

Comme dans le cas du miroir sphérique, nous représenterons, par la suite, un dioptre sphérique utilisé dans les conditions de Gauss par un segment perpendiculaire à l'axe optique (voir figure ci-après).

2.3. Relations de conjugaison.

2.3.1. Origine au centre C

En injectant le centre C dans la relation (9), on obtient :

$$n_1 \frac{\overline{CA_1}}{\overline{SC} + \overline{CA_1}} = n_2 \frac{\overline{CA_2}}{\overline{SC} + \overline{CA_2}}$$

soit : $n_1 \overline{CA_1} (\overline{SC} + \overline{CA_2}) = n_2 \overline{CA_2} (\overline{SC} + \overline{CA_1})$

En divisant par $\overline{CA_1} \; . \overline{SC} \; . \overline{CA_2}$, il vient :

$$\frac{\mathbf{n_1}}{\overline{\mathbf{CA_2}}} - \frac{\mathbf{n_2}}{\overline{\mathbf{CA_1}}} = \frac{\mathbf{n_1} - \mathbf{n_2}}{\overline{\mathbf{CS}}} \qquad (10)$$

2.3.2. Origine au sommet S

Injectons le sommet S dans la relation (9) :

$$n_1 \frac{\overline{SA_1} - \overline{SC}}{\overline{SA_1}} = n_2 \frac{\overline{SA_2} - \overline{SC}}{\overline{SA_2}}$$

il vient : $n_1 - n_1 \dfrac{\overline{SC}}{\overline{SA_1}} = n_2 - n_2 \dfrac{\overline{SC}}{\overline{SA_2}}$

soit : $$\frac{\mathbf{n_1}}{\overline{\mathbf{SA_1}}} - \frac{\mathbf{n_2}}{\overline{\mathbf{SA_2}}} = \frac{\mathbf{n_1} - \mathbf{n_2}}{\overline{\mathbf{SC}}} \qquad (11)$$

Remarques :

* Lorsque le rayon de courbure $\overline{SC}$ est infini, on retrouve la formule du dioptre plan : $\dfrac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}} = \dfrac{n_2}{n_1}$

* En regroupant différemment les termes de la relation (11), on obtient :

$$n_1 \left(\frac{1}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA_1}} \right) = n_2 \left(\frac{1}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA_2}} \right)$$

L'expression $n\left(\frac{1}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA}}\right)$ est aussi une forme invariante du dioptre sphérique.

2.4. Foyers. Distance focale. Vergence

Pour déterminer la position des foyers, il suffit de faire tendre dans l'expression (11) $\overline{SA_1}$ ou $\overline{SA_2}$ vers l'infini.

2.4.1. Foyer objet

Il correspond à la position F_1 du point A_1 lorsque l'image A_2 est à l'infini. On aura alors :

$$\frac{n_1}{\overline{SF_1}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$$

soit $$\overline{\mathbf{SF_1}} = \frac{\mathbf{n_1}}{\mathbf{n_1 - n_2}}\overline{\mathbf{SC}}$$

2.4.2. Foyer image

Il correspond à la position F_2 de l'image A_2 lorsque l'objet A_1 est à l'infini. On a donc :

$$-\frac{n_2}{\overline{SF_2}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$$

soit $$\overline{\mathbf{SF_2}} = \frac{\mathbf{n_2}}{\mathbf{n_2 - n_1}}\overline{\mathbf{SC}}$$

On remarque que les deux expressions se déduisent l'une de l'autre par permutation des indices, ce qui est prévisible.

Comme : $$\overline{SF_1} = \frac{n_1}{n_1 - n_2}\overline{SC}$$

et $$\overline{SF_2} = \frac{n_2}{n_2 - n_1}\overline{SC}$$

on a : $$\frac{\overline{SF_1}}{\overline{SF_2}} = -\frac{n_1}{n_2} \qquad \text{(a)}$$

et $$\overline{SF_1} + \overline{SF_2} = \overline{SC} \qquad \text{(b)}$$

- La première équation (a) montre que **les foyers sont toujours situés de part et d'autre du sommet du dioptre**. Ainsi, si F_1 est dans le milieu 1, F_1 est réel, F_2 est dans le milieu 2, donc F_2 est aussi réel ; par contre, si F_1 est dans le milieu 2, F_1 est virtuel, F_2 se trouve du côté du milieu 1, F_2 est aussi virtuel.
- La deuxième équation (b) montre, quant à elle, que le milieu du segment F_1F_2 coïncide avec le milieu du segment SC : **les foyers sont donc symétriques par rapport au milieu de SC** :

$$\mathbf{\overline{SF_1} = \overline{F_2C} \qquad et \qquad \overline{SF_2} = \overline{F_1C}}$$

2.4.3. Distance focale et vergence

La distance focale est donnée par :

$$f' = \overline{SF_2} = \frac{n_2}{n_2 - n_1}\overline{SC} = \frac{n_2}{n_2 - n_1}R$$

et la vergence est définie par :

$$\mathbf{C = \frac{n_2}{f'} = \frac{n_2}{\overline{SF_2}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}} = \frac{n_2 - n_1}{R}}$$

2.4.4. Dioptres convergents et dioptres divergents

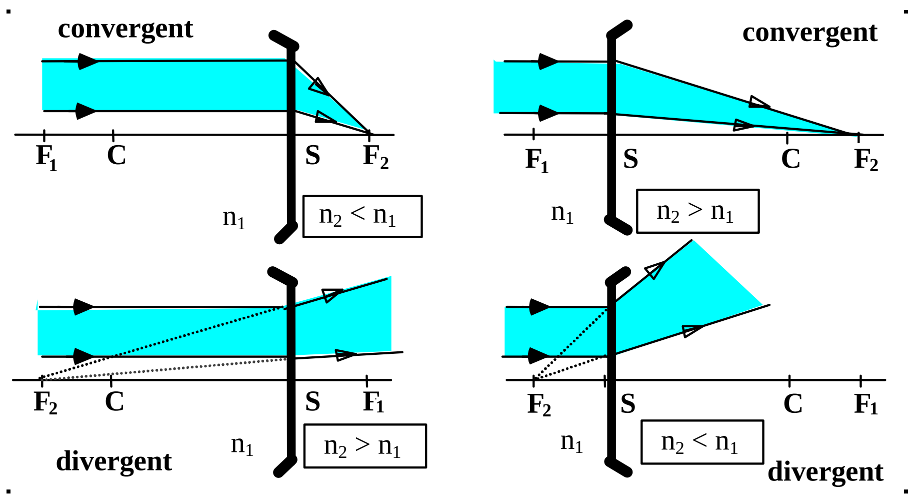
La vergence est une grandeur algébrique :

- si $n_2 - n_1$ et $\overline{SC}$ sont de *même signe*, alors ***la vergence C est positive*** et le ***dioptre*** est dit ***convergent*** .

- si $n_2 - n_1$ et $\overline{SC}$ sont de *signes contraires*, alors ***la vergence C est négative*** et le ***dioptre*** est dit ***divergent***.

On remarquera que les ***dioptres à foyers réels sont convergents*** et les ***dioptres à foyers virtuels sont divergents***.

Nous présentons, sur la figure suivante, les quatre dispositions possibles des points S, C, F_1 et F_2.



Remarque

En utilisant les relations définissant la position des foyers

$$\overline{SF_1} = \frac{n_1}{n_1 - n_2}\overline{SC} \quad \text{et} \quad \overline{SF_2} = \frac{n_2}{n_2 - n_1}\overline{SC}$$

et en multipliant la relation (11) par $\dfrac{\overline{SC}}{n_1 - n_2}$, on obtient :

$$\frac{\overline{SF_1}}{\overline{SA_1}} + \frac{\overline{SF_2}}{\overline{SA_2}} = 1 \qquad (12)$$

2.4.5. Relation de conjugaison avec origine aux foyers. Formule de Newton

En injectant F_1 et F_2 dans la relation (12), on obtient :

$$\frac{\overline{SF_1}}{\overline{SF_1} + \overline{F_1A_1}} + \frac{\overline{SF_2}}{\overline{SF_2} + \overline{F_2A_2}} = 1$$

soit :

$$\overline{SF_1}\left(\overline{SF_2} + \overline{F_2A_2}\right) + \overline{SF_2}\left(\overline{SF_1} + \overline{F_1A_1}\right) = (\overline{SF_1} + \overline{F_1A_1})(\overline{SF_2} + \overline{F_2A_2})$$

qui conduit, après calcul, à la **formule de Newton** :

$$\mathbf{\overline{SF_1}\,.\overline{SF_2} = \overline{F_1A_1}\,.\overline{F_2A_2}}$$

2.5. Construction de l'image d'un petit objet perpendiculaire à l'axe

Comme dans le cas du miroir sphérique, nous allons, pour effectuer cette construction, exploiter les propriétés du centre C, des foyers F_1 et F_2 , du sommet S et utiliser des rayons particuliers .

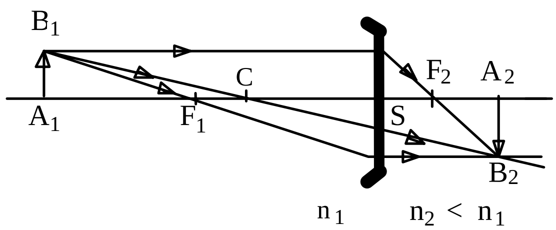
2.5.1. Rayons particuliers

- Tout rayon incident passant par le centre C ne subit aucune déviation,
- Tout rayon incident parallèle à l'axe, se réfracte en passant par le foyer image F_2,
- Tout rayon incident passant par le foyer objet F_1 se réfracte parallèlement à l'axe.

L'image d'un objet A_1B_1 perpendiculaire à l'axe s'obtient donc en cherchant le conjugué B_2 de B_1 à partir de l'intersection de deux des rayons particuliers précédents issus de B_1 et en menant la perpendiculaire à l'axe pour trouver la position de l'image A_2 de A_1.

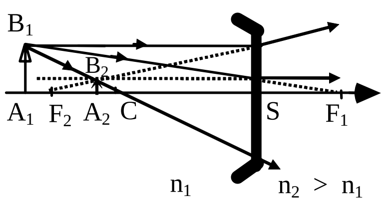
2.5.2. Quelques constructions : Objet réel placé avant F_1

Dioptre convergent



L'image est réelle et renversée

Dioptre divergent

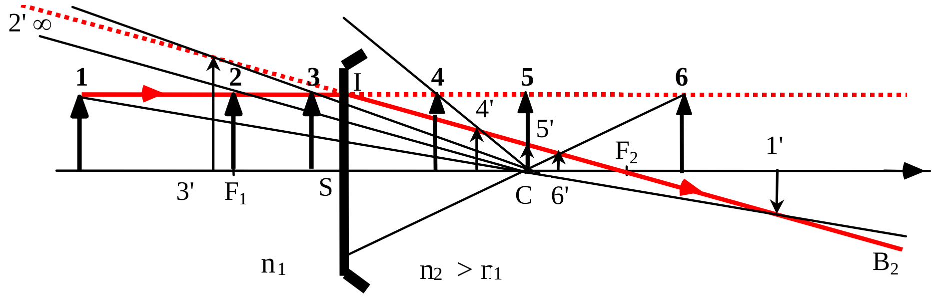


L'image est virtuelle et de même sens que l'objet

2.5.3. Généralisation

La méthode employée dans le cas des miroirs sphériques peut être utilisée pour les dioptres : le lieu de l'image B_2 de B_1 est la droite IF_2 où I est le point du dioptre à la même distance de l'axe que B_1. Pour chaque position de l'objet (de 1 à 6), l'image B_2 se trouve à l'intersection de IF_2 et de B_1C.

Exemple : Cas d'un dioptre convergent recevant la lumière sur sa face convexe :



On **constate** que l'objet et l'image se déplacent dans le même sens avec une discontinuité du déplacement de l'image au passage de l'objet par le foyer F_1.

2.6. Grandissement linéaire transversal

2.6.1. Avec origine au sommet S

On a : $A_1B_1 = SA_1 \text{ tg } i_1$
$A_2B_2 = SA_2 \text{ tg } i_2$

Dans les conditions de l'approximation de Gauss on a $\text{tg } i_1 \approx \sin i_1$ et $\text{tg } i_2 \approx \sin i_2$

On en déduit que : $n_1 \dfrac{A_1B_1}{SA_1} = n_2 \dfrac{A_2B_2}{SA_2}$

d'où : $$\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{n_1}{n_2} \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}}$$

2.6.2. Avec origine au centre C

Dans la figure précédente et dans les triangles A_1B_1C et A_2B_2C, on a

$$\frac{\overline{CA_2}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}$$

soit :

$$\gamma = \frac{\overline{\mathbf{A_2B_2}}}{\overline{\mathbf{A_1B_1}}} = \frac{\overline{\mathbf{CA_2}}}{\overline{\mathbf{CA_1}}}$$

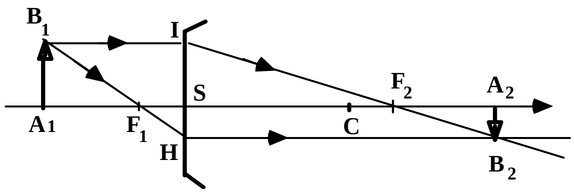
2.6.3. Avec origine aux foyers

Dans les triangles $F_1A_1B_1$ et F_1SH, on a :

$$\frac{\overline{SH}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{F_1S}}{\overline{F_1A_1}}$$

De même, dans les triangles $F_2A_2B_2$ et F_2SI, on a :

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{F_2A_2}}{\overline{F_2S}}$$



Comme $\overline{SH} = \overline{A_2B_2}$ et $\overline{SI} = \overline{A_1B_1}$ on obtient :

$$\gamma = \frac{\overline{\mathbf{A_2B_2}}}{\overline{\mathbf{A_1B_1}}} = \frac{\overline{\mathbf{F_1S}}}{\overline{\mathbf{F_1A_1}}} = \frac{\overline{\mathbf{F_2A_2}}}{\overline{\mathbf{F_2S}}}$$

Exercices et problèmes

EP.7.1. : Miroir sphérique concave

On considère un miroir sphérique concave, de centre C, de sommet S de rayon de courbure R = $\overline{SC}$ = - 30 cm et un objet AB de hauteur 1 cm.

1. Donner la position du foyer F.

2. Déterminer l'image $\overrightarrow{A'B'}$ de $\overrightarrow{AB}$ en précisant sa position, sa nature, son sens et sa taille dans les différents cas suivants : $\overline{SA}$ = - 60 cm , $\overline{SA}$ = - 20 cm , $\overline{SA}$ = 10 cm. Préciser dans chaque cas la nature de l'objet. Faire la construction de l'image dans les trois cas.

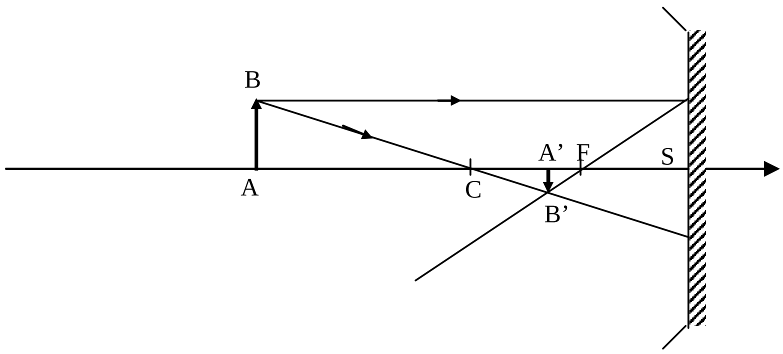
Solution

1. Le foyer F du miroir se trouve au milieu du segment [SC] et $\overline{SF}$ = - 15 cm.
2. La position de A' est obtenue à partir de la formule de conjugaison :

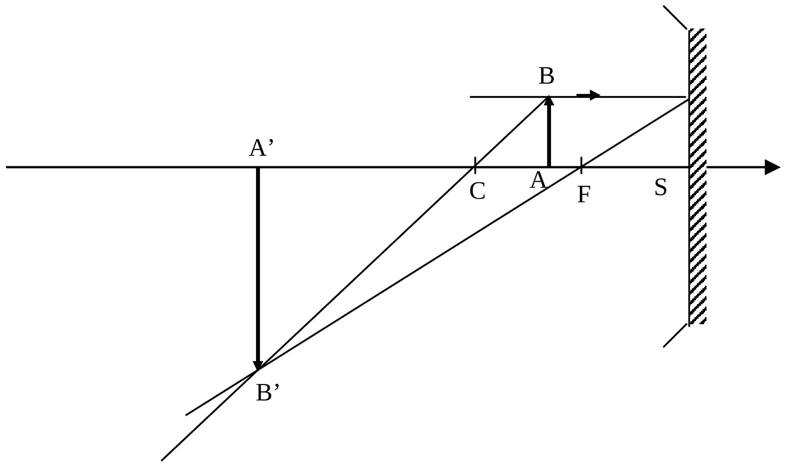
$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SF}} .$$

D'où $\overline{SA'} = \frac{\overline{SF}\,\overline{SA}}{\overline{SA} - \overline{SF}}$ et le grandissement est donné par : $\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$.

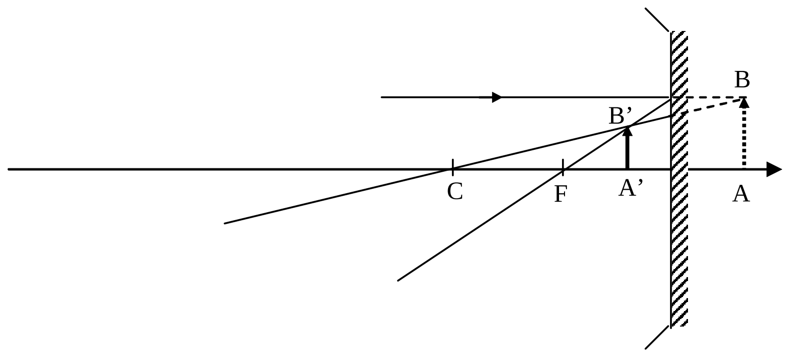
a- $\overline{SA} = -60$ cm. On trouve $\overline{SA'} = -20$ cm , $\gamma = \frac{1}{3}$ et $\overline{A'B'} = 0{,}33$ cm. L'image et l'objet sont réels. L'image est renversée et trois fois plus petite que l'objet.



b. $\overline{SA} = -20$ cm. On trouve : $\overline{SA'} = -60$ cm , $\gamma = 3$ et $\overline{A'B'} = 3$ cm. L'image et l'objet sont réels. L'image est renversée et trois fois plus grande que l'objet.



c. $\overline{SA} = 10$ cm . L'objet est dans ce cas virtuel. On trouve $\overline{SA'} = -6$cm , γ = 0,6 et $\overline{A'B'} = 6$ cm . L'image est donc réelle et de même sens que l'objet.



EP.7.2. : Miroir sphérique convexe

On considère un miroir sphérique convexe, de centre C, de sommet S de rayon de courbure R = $\overline{SC}$ = 30 cm et un objet $\overrightarrow{AB}$ de hauteur 1 cm.

1. Donner la position du foyer F.

2. Déterminer l'image $\overrightarrow{A'B'}$ de $\overrightarrow{AB}$ en précisant sa position, sa nature, son sens et sa taille dans les différents cas suivants : $\overline{SA}$ = - 30 cm , $\overline{SA}$ = 20 cm. Préciser dans chaque cas la nature de l'objet. Faire la construction de l'image.

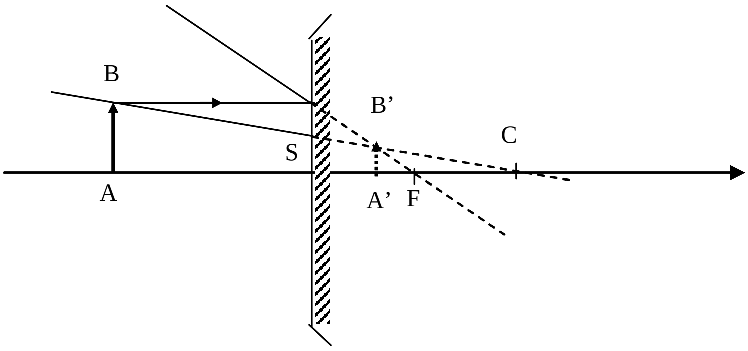
Solution

1. Le foyer F du miroir se trouve au milieu du segment [SC] et $\overline{SF}$ = 15 cm.
2. La position de A' est obtenue à partir de la formule de conjugaison :

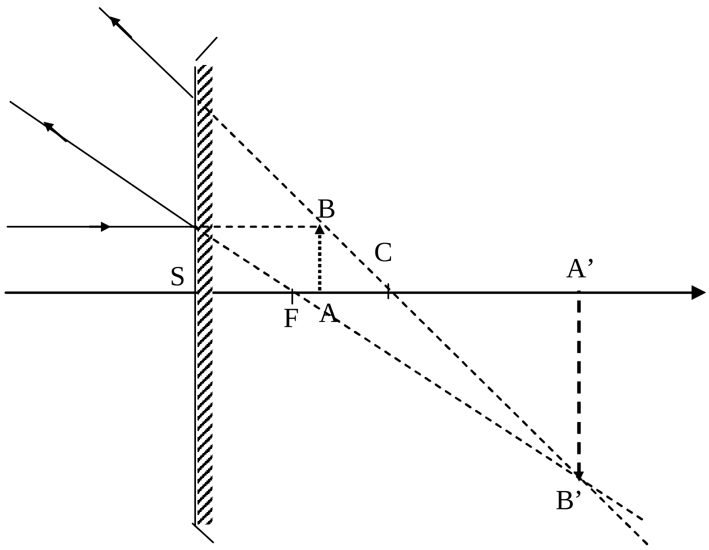
$$\frac{1}{\overline{SA}}+\frac{1}{\overline{SA'}}=\frac{2}{\overline{SC}}=\frac{1}{\overline{SF}}.$$

d'où : $\overline{SA'}=\frac{\overline{SF}\,\overline{SA}}{\overline{SA}-\overline{SF}}$ et le grandissement est donné par : $\gamma=-\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$.

a. $\overline{SA}$ = - 30 cm. On trouve $\overline{SA'}$ = 10 cm , $\gamma=\frac{1}{3}$ et $\overline{A'B'}$ = 0,33 cm. L'image est virtuelle, droite et plus petite que l'objet.



b. $\overline{SA}$ = 20 cm. On trouve $\overline{SA'}$ = 60 cm , γ = - 3 et $\overline{A'B'}$ = - 3 cm. L'objet et l'image sont virtuels. L'image est renversée et trois fois plus grande que l'objet.



EP.7.3. : Rétroviseur

Un rétroviseur est constitué d'un miroir convexe de 1 m de rayon . Installé devant le conducteur d'un véhicule, il réfléchit l'image d'une voiture d'une hauteur de 2 m située à 25 m de son sommet.

On se placera dans le cadre de l'approximation de Gauss du fait de la petite taille du rétroviseur comparé au rayon de courbure du miroir sphérique.

Donner la nature, le sens, la position et la hauteur de l'image de la voiture ?

Solution

La voiture est l'objet $\overrightarrow{AB}$. La position de l'image $\overrightarrow{A'B'}$ est donnée par

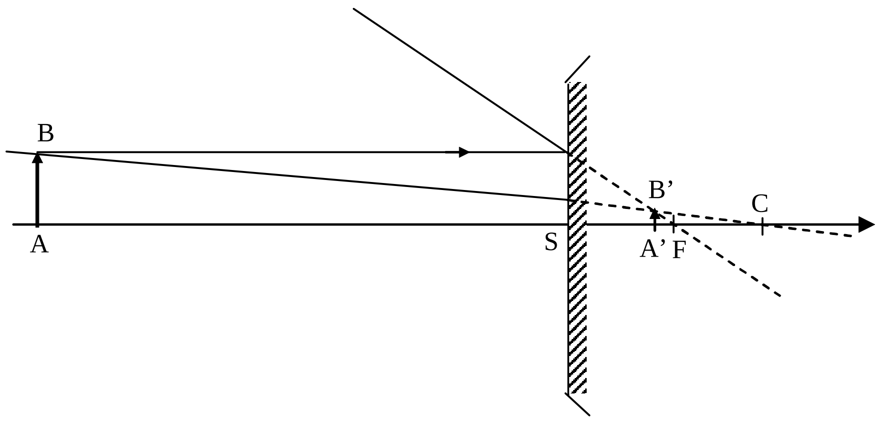
$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SF}}.$$

Sachant que $\overline{SA}$ = - 25 m , $\overline{SC}$ = 1 m , on trouve $\overline{SA'}$ = 0,49 m.

L'image est donc virtuelle.

Le grandissement est donné par $\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ = 0,0196.

L'image a pour hauteur $\overline{A'B'} \cong$ 4 cm et elle dans le bon sens !



EP.7.4. : Image donnée par un miroir sphérique

Un miroir sphérique concave de centre de courbure C et de sommet S a un rayon R = 6 cm.

1. Préciser la position et la nature des foyers du miroir.

2. Un objet réel $\overrightarrow{AB}$ de dimension $\frac{R}{6}$ est situé à une distance $\frac{3R}{2}$ du sommet S.

2.a. Tracer, à l'échelle réelle, la marche du rayon lumineux montrant la formation de l'image $\overrightarrow{A'B'}$. En déduire la nature, la position et la dimension de cette image.

2.b. Retrouver ces résultats en appliquant les formules de conjugaison relatives au miroir sphérique. On se placera dans le cadre du stigmatisme approché.

3. Où doit-on placer cet objet $\overrightarrow{AB}$ pour obtenir une image $\overrightarrow{A'B'}$ droite, virtuelle et deux fois plus grande que $\overrightarrow{AB}$? Donner alors la position de cette image par rapport au sommet S.

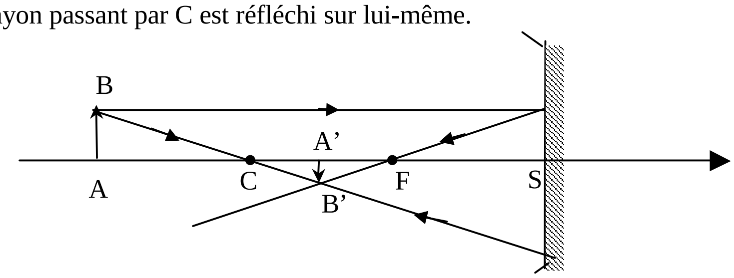
Représenter la marche des rayons lumineux correspondants.

Solution

1- Les deux foyers objet et image sont confondus et sont réels et se trouvent au milieu de C et S : $\overline{CF} = \overline{FS} = \frac{R}{2} = f = 3\text{cm}$ **.**

2-a- Pour la construction, on considère deux rayons passant par B:

- le rayon parallèle à l'axe est réfléchi en passant par F
- le rayon passant par C est réfléchi sur lui-même.



2-b- La formule de conjugaison donne :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad \text{avec } \overline{SC} = -6\text{cm et } \overline{SA} = -9\text{cm}.$$

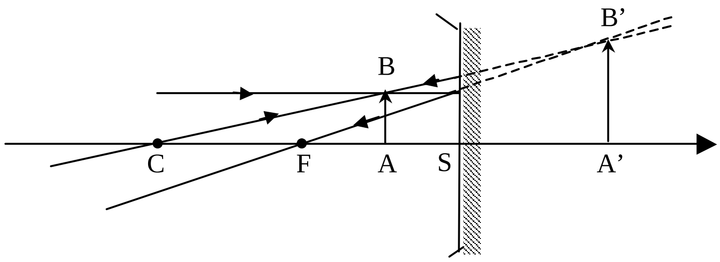
On trouve $\overline{SA'} = -4{,}5\text{cm}$, $G = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -\frac{1}{2}$ et $\overline{A'B'} = -\ 0{,}5\text{cm}$. L'image est réelle et renversée.

3- On veut : $G = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \overline{SA'} = -\ 2\overline{SA}$

D'autre part, $\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$, on a alors

$$\overline{SA} = \frac{\overline{SC}}{4} = -1{,}5 \text{ cm et } \overline{SA'} = 3 \text{ cm}.$$

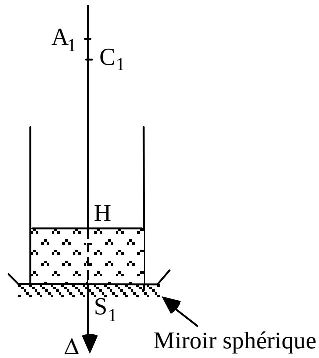
L'objet est donc réel et placé au milieu de F et S et l'image $\overrightarrow{A'B'}$ est une image virtuelle et droite.



EP.7.5. : Association d'un dioptre plan et d'un miroir sphérique

Le fond d'un cylindre est constitué d'une surface sphérique de sommet S_1, concave, réfléchissante, ayant son centre C_1 sur l'axe Δ du cylindre à une distance de 200 cm de S_1 ($\overline{S_1C_1}$ = - 200 cm).

Le cylindre est rempli d'eau, d'indice $n = \frac{4}{3}$, jusqu'à une hauteur de 50 cm ($\overline{S_1H}$ = - 50 cm), H étant l'intersection de la surface de l'eau avec l'axe Δ du cylindre tel que représenté sur la figure ci-après.



On désigne par Σ_1 le système optique ainsi formé.

Un point objet A_1 est placé sur l'axe Δ tel que $\overline{S_1A_1}$ = - 212,5 cm .

1. Déterminer les positions, par rapport à S_1, des images successives A_2, A_3, A_4 données respectivement par le dioptre plan (air-eau), le miroir sphérique constituant le fond du cylindre puis le dioptre plan (eau-air).

2. Le système optique Σ_1 est équivalent à un miroir sphérique concave, noté Σ_2, de sommet S_2 image de S_1 à travers le dioptre plan.

2.a. Déterminer, par rapport à S_1, la position du centre C_2 de Σ_2 .

2.b. Montrer que C_1 et C_2 sont deux points conjugués par rapport au dioptre plan.

3. Construire l'image d'un petit objet $\overline{A_1B_1}$, perpendiculaire à l'axe Δ, donnée par le système optique Σ_1 .

Solution

1. Images successives :

- Image A_2 de A_1 donnée par le dioptre plan (air-eau) :

$$\frac{\overline{HA_1}}{1} = \frac{\overline{HA_2}}{n} \Rightarrow \overline{HA_2} = n\ \overline{HA_1} = \frac{4}{3}(-162{,}5) = -216{,}67\text{ cm}$$

soit : $\overline{S_1A_2} = \overline{S_1H} + \overline{HA_2} = -266{,}67$ cm

- Image A_3 de A_2 donnée par le miroir sphérique :

$$\frac{1}{\overline{S_1A_2}} + \frac{1}{\overline{S_1A_3}} = \frac{2}{\overline{S_1C_1}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{S_1A_3}} = \frac{2}{\overline{S_1C_1}} - \frac{1}{\overline{S_1A_2}}$$

soit : $$\overline{S_1A_3} = \frac{\overline{S_1C_1}.\overline{S_1A_2}}{2\overline{S_1A_2} - \overline{S_1C_1}} = -160\text{ cm}$$

- Image A_4 de A_3 donnée par le dioptre plan (eau-air) :

$$\frac{\overline{HA_3}}{n} = \frac{\overline{HA_4}}{1}$$

$$\Rightarrow \overline{HA_4} = \frac{1}{n}\overline{HA_3} = \frac{3}{4}\overline{HA_3} = \frac{3}{4}(\overline{HS_1} + \overline{S_1A_3}) = -82{,}5\text{ cm}$$

soit : $\overline{S_1A_4} = \overline{S_1H} + \overline{HA_4} = -132{,}5$ cm

2.a. Position du centre C_2 du miroir sphérique équivalent Σ_2 :

A_4 est l'image de A_1 donnée par le miroir équivalent Σ_2 on a :

$$\frac{1}{\overline{S_2A_1}} + \frac{1}{\overline{S_2A_4}} = \frac{2}{\overline{S_2C_2}}$$

Position du sommet S_2 image de S_1 donnée par le dioptre plan :

$$\frac{\overline{HS_1}}{n} = \frac{\overline{HS_2}}{1} \Rightarrow \overline{HS_2} = \frac{3}{4}\overline{HS_1} = +37{,}5\text{ cm}$$

et : $\overline{S_1S_2} = -12{,}5$ cm ; $\overline{S_2A_1} = -200$ cm ; $\overline{S_2A_4} = -120$ cm

soit : $$\overline{S_2C_2} = 2\frac{\overline{S_2A_1}.\overline{S_2A_4}}{\overline{S_2A_4} + \overline{S_2A_1}} = -150\text{cm}$$

d'où : $\overline{S_1C_2} = -162{,}5$ cm et $\overline{HC_2} = -112{,}5$

2.b. C_1 et C_2 sont des points conjugués par rapport au dioptre plan :

On a : $$\frac{\overline{HC_1}}{n} = \frac{\overline{HC_2}}{1} \Rightarrow \overline{HC_2} = \frac{\overline{HC_1}}{n} = -112{,}5\text{ cm}$$

3 - Construction de l'image de A_1 :

Pour cette construction, il est plus simple d'utiliser le miroir sphérique équivalent Σ_2 .

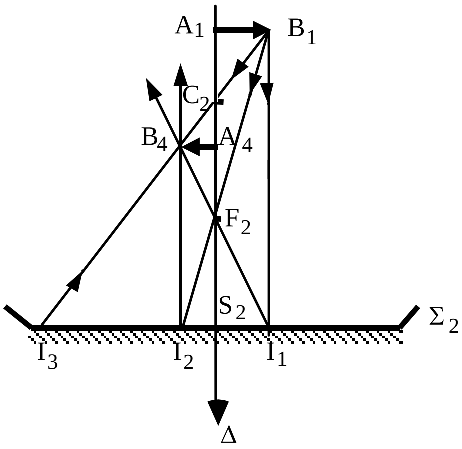
On a : $\overline{S_2C_2}$ = - 150 cm

$\overline{S_2A_1}$ = - 200 cm

$\overline{S_2F_2}$ = - 75 cm

On utilise les rayons :

- B_1I_1 , parallèle à Δ, qui se réfléchit en passant par F_2
- B_1I_2 , passant par F_2, qui se réfléchit parallèlement à Δ
- B_1I_3 , passant par C_2, qui se réfléchit sur lui-même



EP.7.6. : Association de deux miroirs sphériques 1

Un miroir sphérique concave M1 et un miroir sphérique convexe M2 de même rayon de courbure R = 1m ont leur faces réfléchissantes en regard, leurs sommets S_1 et S_2 étant distants de 2 m. On place, à égale distance de M_1 et M_2 et perpendiculairement à leur axe optique commun, un petit objet $\overrightarrow{A_1B_1}$ de 3 cm de hauteur.

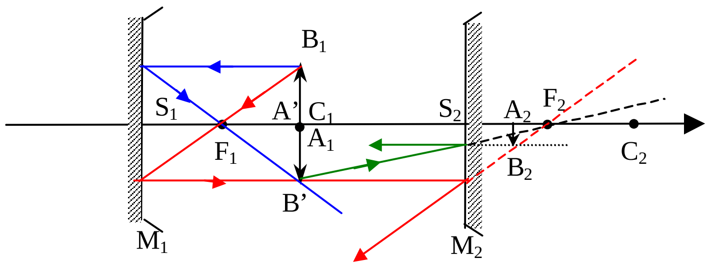
1- Construire l'image finale $\overrightarrow{A_2B_2}$ de $\overrightarrow{A_1B_1}$ donnée par les deux miroirs en considérant d'abord une réflexion sur le miroir M_1 puis ensuite une réflexion sur le miroir M_2.

2- Déterminer, dans ce cas, la position, la grandeur et la nature de l'image $\overrightarrow{A_2B_2}$.

Solution

1- Image finale $\overrightarrow{A_2B_2}$

$$\overrightarrow{A_1B_1} \xrightarrow{M_1} \overrightarrow{A'B'} \xrightarrow{M_2} \overrightarrow{A_2B_2} \quad \text{avec} \quad A1 \equiv C1$$



2- Position, grandeur et nature de $\overrightarrow{A_2B_2}$

$$A_1 \xrightarrow{M_1} A' \Rightarrow \frac{1}{\overline{S_1A_1}} + \frac{1}{\overline{S_1A'}} = \frac{2}{\overline{S_1C_1}} = \frac{2}{\overline{S_1A_1}} \Rightarrow \overline{S_1A'} = \overline{S_1A_1}$$

$$A' \xrightarrow{M_2} A_2 \Rightarrow \frac{1}{\overline{S_2A_2}} + \frac{1}{\overline{S_2A'}} = \frac{2}{\overline{S_2C_2}} = \frac{2}{\overline{S_1C_1}} = \frac{2}{\overline{S_1A'}}$$

Avec $\overline{S_2A'} = -\overline{S_1A'} \Rightarrow \overline{S_2A_2} = \frac{\overline{S_1A_1}}{3} = \frac{R}{3}$

L'image est donc virtuelle

On a : $\gamma_1 = -\frac{\overline{S_1A'}}{\overline{S_1A_1}} = -1$

$\gamma_2 = -\frac{\overline{S_2A_2}}{\overline{S_2A'}} = \frac{1}{3}$

d'où $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 = -\frac{1}{3}$

L'image est virtuelle, renversée et trois fois plus petite que l'objet.

EP.7.7 : Association de deux miroirs sphériques 2

On considère deux miroirs sphériques M_1 concave et M_2 convexe de centre commun C. Le miroir M_1 est percé en son sommet S_1 d'une petite ouverture destinée à l'observation de l'image donnée par le système. Soient R_1 et R_2 les rayons des deux miroirs ($R_1 > R_2$). Le système est utilisé dans l'approximation de Gauss pour l'observation d'un objet à l'infini.

1- Quelle doit être la valeur de R_2 en fonction de R_1 pour que l'image finale se forme en S_1.

2- Donner le grandissement linéaire transversal. L'objet étant situé à l'infini, on utilisera son diamètre apparent donné par $\frac{\overline{AB}}{\overline{S_1A}} = \alpha$

Solution

1°) $\overline{S_1C} = R_1$ et $\overline{S_2C} = R_2$ avec $F_1 = S_1{*}C$ et $\overline{CF_1} = -\dfrac{R_1}{2}$

L'image de l'objet à l'infini se forme en F_1 qui sert d'objet pour le second miroir M_2 et son image doit se former en S_1 :

$$\frac{1}{\overline{CF_1}} + \frac{1}{\overline{CS_1}} = \frac{2}{\overline{CS_2}} \Rightarrow \overline{CS_2} = 2\frac{\overline{CS_1} \cdot \overline{CF_1}}{\overline{CS_1} + \overline{CF_1}} = -\frac{2}{3}R_1$$

D'où $R_2 = -\dfrac{2}{3}R_1$.

2°) $\gamma_1 = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = -\dfrac{\overline{S_1A_1}}{\overline{S_1A}} = -\dfrac{\overline{S_1F_1}}{\overline{S_1A}}$.

Ainsi, $\overline{A_1B_1} = -\dfrac{\overline{AB}}{\overline{S_1A}}\overline{S_1F_1} = -\alpha\,\overline{S_1F_1} = -\alpha\,\dfrac{R_1}{2}$.

L'image est renversée par le premier miroir.

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{CS_1}}{\overline{CF_1}} = 2.$$

L'image finale est donc renversée et a pour grandeur :

$$\overline{A_2B_2} = \gamma_1\gamma_2\,\overline{AB} = -\alpha\ R_1.$$

EP.7.8. : Association de deux miroirs sphériques 3

On considère un miroir sphérique concave M_1 de sommet S_1 , de distance focale $\overline{S_1F_1} = f_1$, percé d'une petite ouverture circulaire centrée sur l'axe optique Δ en S_1 et un miroir sphérique convexe M_2 , de sommet S_2 , de même axe optique Δ.

Le miroir M_1 donne d'une source objet $\overline{A_1B_1}$ située à l'infini dans la direction de Δ, une image $\overline{A'B'}$.

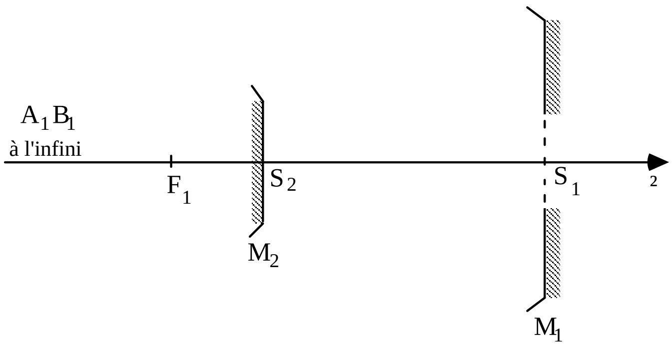
Le miroir M_2 donne de $\overline{A'B'}$ une image $\overline{A_2B_2}$.

1. Quelle est la position de $\overline{A'B'}$ par rapport à S_1 ?

2. Déterminer la position de S_2 par rapport à S_1 pour que l'image $\overline{A_2B_2}$ soit de même sens et trois fois plus grande que $\overline{A'B'}$ et située dans le plan de front de S_1 (plan passant par S_1 et perpendiculaire à Δ).

3/- Déterminer la distance focale $\overline{S_2F_2} = f_2$ de M_2 .

Application numérique : on donne f_1 = - 7,20 m.



Solution

1. L'objet $\overline{A_1B_1}$ étant à l'infini, son image $\overline{A'B'}$ donnée par M_1 se forme dans le plan focal de M_1, A' étant en F_1 $\Rightarrow$ $\overline{S_1A'} = \overline{S_1F_1}$.

2. Le grandissement linéaire du miroir M_2 est donné par :

$$\gamma = - \frac{\overline{S_2A_2}}{\overline{S_2A'}} = - \frac{\overline{S_2S_1}}{\overline{S_2F_1}} = \frac{\overline{S_1S_2}}{\overline{S_2F_1}} \quad \text{car } A_2 \text{ doit se former en } S_1$$

avec : $\overline{S_2F_1} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1F_1}$

La position de S_2 est donnée par :

$$\overline{S_1S_2} = \gamma \frac{\overline{S_1F_1}}{\gamma + 1} = \frac{3\,f_1}{4} = -5{,}4 \text{ m}$$

3. On a :

$$\frac{1}{\overline{S_2A_2}} + \frac{1}{\overline{S_2A'}} = \frac{2}{\overline{S_2C_2}} = \frac{1}{\overline{S_2F_2}}$$

soit : $\dfrac{1}{\overline{S_2F_2}} = \dfrac{1}{\overline{S_2S_1}} + \dfrac{1}{\overline{S_2F_1}}$

d'où $\overline{S_2F_2} = -\overline{S_1F_1}\dfrac{\gamma}{1-\gamma^2} = -f_1 \dfrac{\gamma}{1-\gamma^2} = -2{,}7 \text{ m}$

EP.7.9. : Image d'un objet dans une cavité

Un petit objet $\overline{A_0B_0}$ est placé perpendiculairement à l'axe optique Δ d'un miroir sphérique concave M à la distance A_0S du sommet S de M.

On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.

Le miroir M donne de $\overline{A_0B_0}$ une image $\overline{A_1B_1}$.

1. Donner, en prenant S pour origine, la relation de conjugaison entre les positions de l'objet $\overline{A_0B_0}$ et de son image $\overline{A_1B_1}$ ainsi que l'expression du grandissement $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_0B_0}}$.

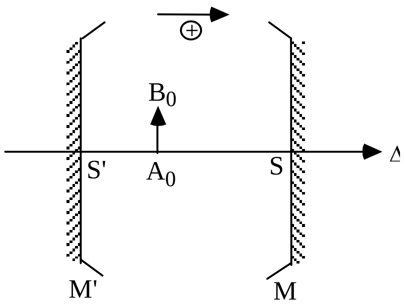
2. L'image $\overline{A_1B_1}$ est réelle, renversée et trois fois plus grande que l'objet et tel que $\overline{A_0A_1} = - 8$ cm.

2.1. Déterminer la position de l'objet $\overline{A_0B_0}$.

2.2. Trouver le rayon de courbure $\overline{SC}$ et la position des foyers principaux de ce miroir.

2.3. Construire l'image $\overline{A_1B_1}$.

3. Un second miroir sphérique concave M', de sommet S', identique à M, de même axe optique est placé à une distance de M telle que $\overline{SS'} = - 6$ cm, l'ensemble M et M' formant une cavité.



3.1. Déterminer la position de l'image $\overline{A_2B_2}$ de $\overline{A_1B_1}$ à travers le miroir M' . En déduire le rapport $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_0B_0}}$.

3.2. Au bout d'un nombre n d'images, le système (MM') donne une image $\overline{A_nB_n}$ confondue avec l'objet $\overline{A_0B_0}$.

Trouver n

Solution

1. Relation de conjugaison entre A_0 et A_1 et grandissement :

$$\frac{1}{\overline{SA_0}} + \frac{1}{\overline{SA_1}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_0B_0}} = - \frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_0}}$$

2.1. Position de l'objet :

On a : $\gamma = -\dfrac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_0}} = -\dfrac{\overline{SA_0} + \overline{A_0A_1}}{\overline{SA_0}} = -1 - \dfrac{\overline{A_0A_1}}{\overline{SA_0}} = -3$

d'où $\overline{SA_0} = \dfrac{\overline{A_0A_1}}{2} = -4$ cm

2.2 Rayon de courbure et position des foyers :

$$\overline{SC} = 2\,\frac{\overline{SA_0}\,\overline{SA_1}}{\overline{SA_0} + \overline{SA_1}}$$

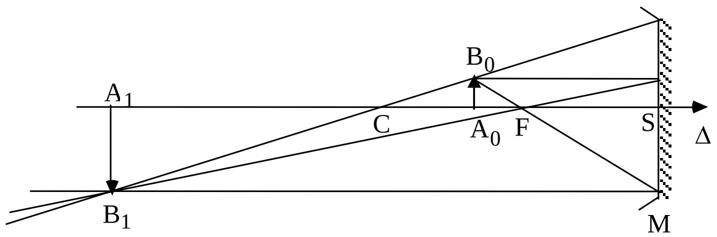
avec $\overline{SA_0} = \dfrac{\overline{A_0A_1}}{2} = -4$ cm et $\overline{SA_1} = \overline{SA_0} + \overline{A_0A_1} = -12$ cm

soit $\overline{SC} = -6$ cm

Les foyers objet et image sont confondus et situés au milieu de SC. On a donc :

$\overline{SF} = -3$ cm

2.3.



3- 1- On a $\dfrac{1}{\overline{S'A_1}} + \dfrac{1}{\overline{S'A_2}} = \dfrac{2}{\overline{S'C'}}$

avec $\overline{S'C'} = 6$ cm et $\overline{S'A_1} = \overline{S'S} + \overline{SA_1} = -6$ cm

d'où $\dfrac{1}{\overline{S'A_2}} = \dfrac{2}{\overline{S'C'}} - \dfrac{1}{\overline{S'A_1}} = \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$

soit $\overline{S'A_2} = 2$ cm et $A_2 \equiv A_0$

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_0B_0}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}\,\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_0B_0}} = -\frac{\overline{S'A_2}}{\overline{S'A_1}}(-3) = 3\,\frac{2}{-6}$$

soit $\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_0B_0}} = -1$

$\overline{A_2B_2}$ occupe la même position et a même grandeur que $\overline{A_0B_0}$ mais elle est renversée.

3- 2- On a : $\overline{A_0B_0} \xrightarrow{M} \overline{A_1B_1} \xrightarrow{M'} \overline{A_2B_2} \equiv -\overline{A_0B_0}$

$\gamma_1 = -3$ $\qquad \gamma'_2 = -1/3$

Donc au bout de 2 réflexions, l'une sur M et l'autre sur M', on retrouve une image identique à l'objet initial mais renversée. Pour retrouver une image identique et de

même sens que l'objet initial, il suffit de refaire 2 autres réflexions, l'une sur M et l'autre sur M'. Le nombre d'images est donc $\boxed{n = 4}$

$$\overline{A_2B_2} \equiv -\overline{A_0B_0} \xrightarrow{M} \overline{A_3B_3} \equiv -\overline{A_1B_1} \xrightarrow{M'} \overline{A_4B_4} \equiv -\overline{A_2B_2} \equiv \overline{A_0B_0}$$

$$\gamma_1 = -3 \qquad\qquad \gamma'_2 = -1/3$$

EP.7.10. : Rayon de courbure d'un dioptre sphérique

Soit un dioptre sphérique de sommet S et de centre C séparant l'air d'indice $n_1 = 1$ d'un milieu d'indice $n_2 = 1,5$. Un petit objet virtuel $\overrightarrow{AB}$ est placé à une distance d = 10 cm du sommet du dioptre. Déterminer

1. le rayon de courbure R = $\overline{SC}$ de ce dioptre lorsqu'il donne une image réelle $\overrightarrow{A'B'}$ située à une distance :

1.a. d' = 30cm
1.b. d' = 15 cm
1.c. d' = 10 cm

2. les grandissements linéaires transversaux correspondants à chacun des cas

Solution

1. On applique la relation de conjugaison d'un dioptre sphérique avec origine au sommet :

$$\frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$$

avec : $\frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{1}{10}$

$$\frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}} = \frac{1}{2R}$$

1.a. $\overline{SA'} = 30$ cm $\Rightarrow$ R = - 10 cm : le dioptre est concave

1.b. $\overline{SA'} = 15$ cm $\Rightarrow$ R = ∞ : le dioptre est plan

1.c. $\overline{SA'} = 10$ cm $\Rightarrow$ R = + 10 cm : le dioptre est convexe et A est au centre C du dioptre. Son image A' est également en C.

2. Le grandissement linéaire transversal est donné par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n_1}{n_2}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{2}{3}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

2.a. $\overline{SA'} = 30$ cm $\Rightarrow$ $\gamma = 2$

2.b. $\overline{SA'} = 15$ cm $\Rightarrow$ $\gamma = 1$

2.c. $\overline{SA'} = 10$ cm $\Rightarrow$ $\gamma = \frac{2}{3}$

EP.7.11. : Foyers d'un dioptre sphérique

On considère un dioptre sphérique de centre C, de sommet S et de rayon de courbure R = 50 cm séparant un milieu objet d'indice n_1 = 1,5 d'un milieu image d'indice n_2 = 1. Le centre C est dans le milieu d'indice n_2.

1. Calculer les positions des foyers objet F_1 et image F_2 de ce dioptre.

En déduire le rapport des distances focales $\frac{f}{f'}$ et leur somme f + f'

Que peut-on dire de la nature de ces foyers ?

2. On place, perpendiculairement à l'axe optique de ce dioptre, un petit objet $\overrightarrow{AB}$ de 2 cm de hauteur et situé à une distance "d " du sommet S.

Déterminer la position, la grandeur et la nature de l'image $\overrightarrow{A'B'}$ de $\overrightarrow{AB}$ à travers ce dioptre dans les trois cas suivants :

2.a. d = 50 cm = $\overline{AS}$

2.b. d = 25 cm = $\overline{SA}$

2.c. d = 100 cm = $\overline{SA}$

Faire une construction graphique pour chaque cas.

Solution

1. Position et nature des foyers

On a : $\overline{SF_1} = \frac{n_1}{n_1 - n_2}\overline{SC}$ d'où $\overline{SF_1} = 3\,\overline{SC}$

$\overline{SF_2} = \frac{n_2}{n_2 - n_1}\overline{SC}$ d'où $\overline{SF_2} = -2\,\overline{SC}$

$$\frac{\overline{SF_1}}{\overline{SF_2}} = \frac{f}{f'} = -\frac{3}{2} = -\frac{n_1}{n_2}$$

$$\overline{SF_1} + \overline{SF_2} = f + f' = \overline{SC}$$

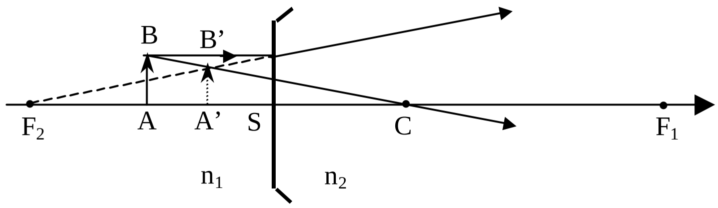
$\overline{SC} > 0$ d'où $\overline{SF_1} > 0$ et $\overline{SF_2} < 0$

ce qui entraîne que F_1 et F_2 sont virtuels

Le dioptre est divergent.

2. Image $\overrightarrow{A'B'}$

2.a. d = 50 cm = $\overline{AS}$: ⇒ $\overline{AS} = \overline{SC}$: A est symétrique de C par rapport à S et $\overrightarrow{AB}$ est réel

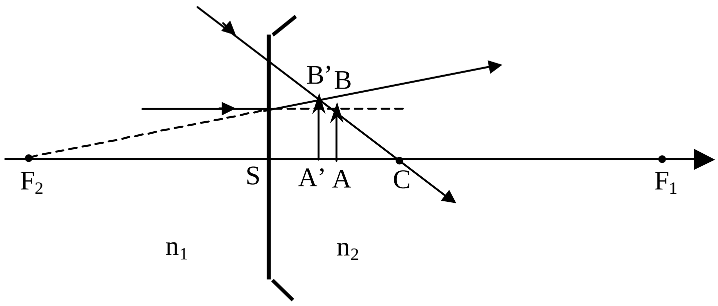


On a : $\dfrac{n_1}{\overline{SA}} - \dfrac{n_2}{\overline{SA'}} = \dfrac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{SA'} = -\dfrac{\overline{SC}}{2} = \dfrac{\overline{SA}}{2}$

$\gamma = \dfrac{n_1}{n_2}\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{A'B'} = \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{AB}$

L’image est virtuelle, droite, placée au milieu de AS et de 1,5 cm de hauteur.

2.b. $d = 25 \text{ cm} = \overline{SA}$: $\Rightarrow$ $\overline{SA} = \dfrac{\overline{SC}}{2}$ et $\overrightarrow{AB}$ est virtuel



On obtient : $\overline{SA'} = \dfrac{2}{5}\overline{SC} = \dfrac{4}{5}\overline{SA}$

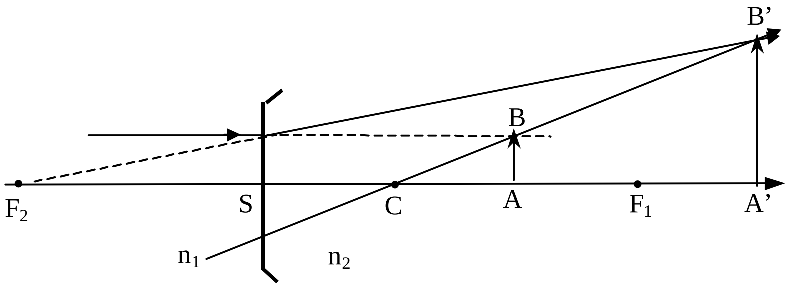
$\overrightarrow{A'B'} = \dfrac{6}{5}\,\overrightarrow{AB}$

L’image est réelle, droite, placée à 20 cm de S et de 2,4 cm de hauteur.

2.c. $d = 100 \text{ cm} = \overline{SA}$: $\Rightarrow$ $\overline{SA} = 2\,\overline{SC}$ et $\overrightarrow{AB}$ est virtuel

On obtient : $\overline{SA'} = 4\,\overline{SC} = 2\,\overline{SA}$

$\overrightarrow{A'B'} = 3\,\overrightarrow{AB}$

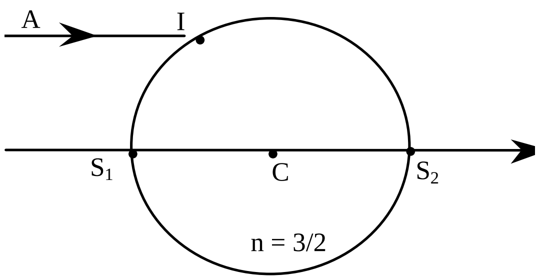


EP.7.12. : Boule de cristal

On peut considérer une boule en cristal d'indice $n = \frac{3}{2}$ placée dans l'air comme formée par l'association de deux dioptres sphériques de sommets S_1 et S_2 et de rayon $\overline{S_1C} = -\overline{S_2C} = R$ où R est une constante positive.

Soit un rayon lumineux incident AI parallèle à l'axe optique S_1S_2 provenant d'un objet A et tombant sur le premier dioptre en I.

1. Trouver la position de A_1 image de A à travers le premier dioptre..



2. Déterminer la position de A', image de A_1 donnée par le second dioptre. Que représente ce point pour la boule ?

3. Tracer la marche du rayon lumineux AI à travers la boule.

4. En utilisant la symétrie du système et le principe du retour inverse de la lumière, donner, sans calcul, la position du foyer objet F de cette boule.

Solution

1. On a : $\frac{n_1}{\overline{S_1A}} - \frac{n_2}{\overline{S_1A_1}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{S_1C}}$

A est à l'infini dans la direction de l'axe donc $\frac{n_1}{\overline{S_1A_1}} = 0$ et A_1 représente donc le foyer image du dioptre S_1.

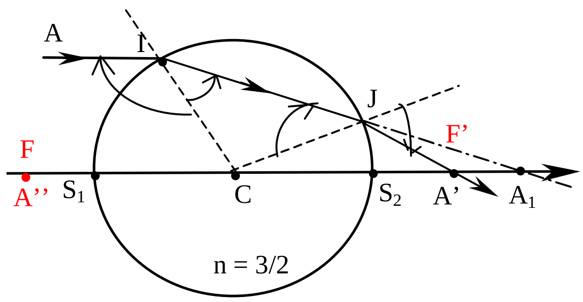
$$\overline{S_1A_1} = \overline{S_1F'_1} = \frac{n_2}{n_2 - n_1}\,\overline{S_1C} = 3R$$

2. $\dfrac{n_2}{\overline{S_2A_1}} - \dfrac{n_1}{\overline{S_2A'}} = \dfrac{n_2 - n_1}{\overline{S_2C}}$ avec $\overline{S_2A_1} = R$ et $\overline{S_2C} = -R$

soit : $\overline{S_2A'} = \dfrac{R}{2}$

A' représente le foyer image F' de la boule.

3. Marche d'un rayon lumineux : elle est représentée sur la figure ci-après :



4. Le système est symétrique par rapport à un axe vertical passant par C. Un rayon symétrique de AI par rapport à cet axe suivrait un chemin symétrique de AIJA' par rapport à cet axe et convergerait en un point A'' tel que $\overline{S_1A''} = -\dfrac{R}{2}$. Le point A'' représente le foyer objet F de la boule.

EP.7.13. : Association d'un dioptre et d'un miroir sphériques

On considère un dioptre sphérique convexe D, d'axe optique Δ, de centre C_1, de sommet S_1 et de rayon $\overline{S_1C_1} = R = 0{,}5\ m$, séparant l'air, d'indice 1, d'un milieu d'indice $n = \dfrac{3}{2}$.

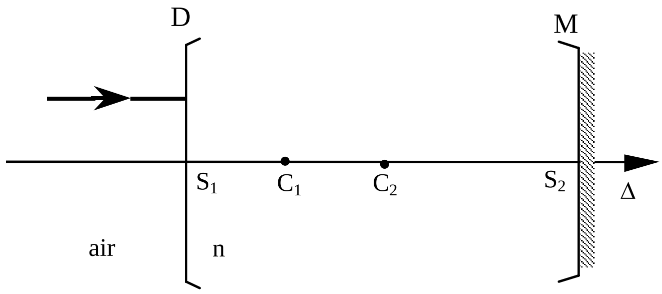
Un miroir sphérique concave M, de même axe Δ, de centre C_2, de sommet S_2 et de rayon $\overline{C_2S_2} = 2R$, est placé dans le milieu d'indice n .

1. Le centre C_2 du miroir M est placé à la distance R de C_1 ($\overline{C_1C_2} = R$).

Tracer la marche d'un rayon incident parallèle à l'axe Δ.

2. On déplace le miroir M.

Quelle doit être la position du centre C_2 par rapport à C_1 pour qu'un rayon incident parallèle à l'axe Δ émerge, du milieu d'indice n, confondu avec lui-même ?

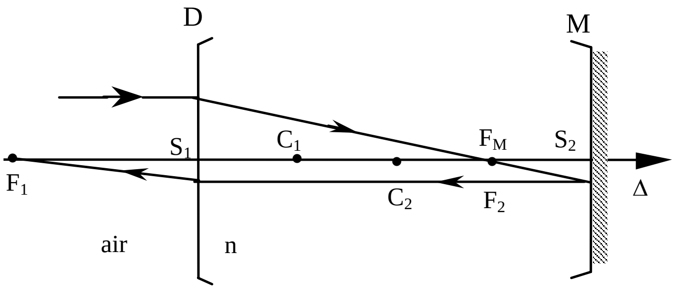


Solution

1. Foyers F_1 et F_2 du dioptre sphérique :

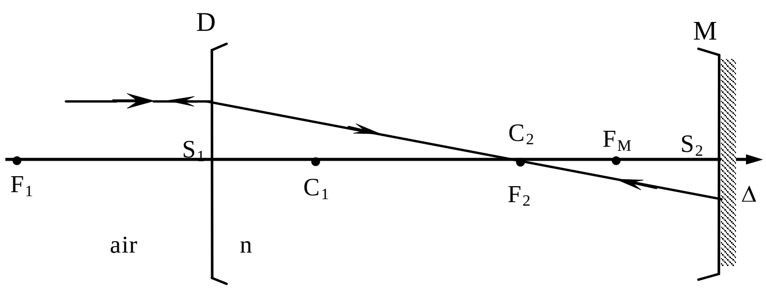
$$\overline{S_1F_1} = \frac{n_1}{n_1 - n_2}\overline{S_1C_1} = -2R$$

$$\overline{S_1F_2} = \frac{n_2}{n_2 - n_1}\overline{S_1C_1} = 3R \quad \Rightarrow \qquad F_2 = C_2{*}S_2 \equiv F_M$$



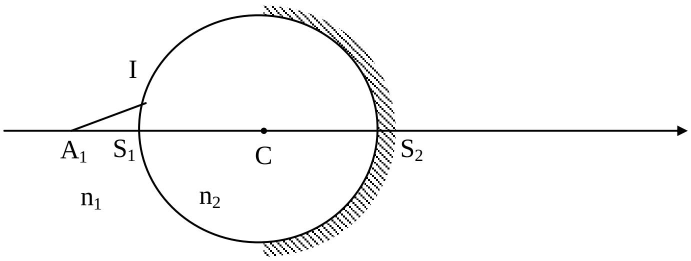
2. Pour que le rayon incident émerge du milieu d'indice n confondu avec lui-même, il faut que ce rayon se réfléchisse sur le miroir sur lui-même. Ce rayon doit donc passer par le centre C_2 du miroir, ce qui entraîne que F_2 doit être confondu avec C_2 :

$$F_2 \equiv C_2 \quad \text{ou encore} \quad \overline{C_1C_2} = 2\,R$$



EP.7.14. : Foyers d'une boule semi argentée

On considère une boule d'indice n_2 de rayon R, de centre C, plongée dans un milieu d'indice n_1 ($n_2 > n_1$) et argentée sur un hémisphère. Soit un point lumineux A_1 sur l'axe optique S_1CS_2 placé à une distance d en avant de S_1. On suppose les conditions de Gauss réalisées.



1. Tracer la marche du rayon lumineux A_1I.

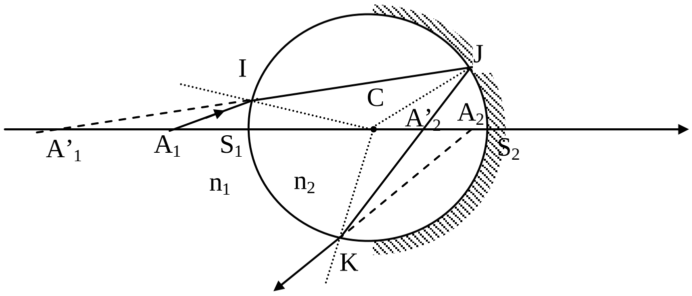
2. Déterminer la position de A_2 image de A_1 donnée par le système centré constitué par cette boule de verre semi argentée..

3. Déterminer la position des foyers image F'et objet F du système.

On donne : R = 50 cm, d = 25 cm, n_1 = 1, n_2 = 3/2

Solution

1. Marche du rayon lumineux A_1I :



Le rayon incident A_1I se réfracte en I ; le rayon réfracté IJ se réfléchit en J ; le rayon réfléchi JK se réfracte en K.

Le rayon IJ coupe l'axe optique en A'_1 qui est l'image de A_1 donnée par le dioptre sphérique de sommet S_1. ; le rayon JK coupe l'axe en A'_2 image de A'_1 à travers la face argentée réfléchissante, le rayon émergent KA_2 coupe l'axe optique en A_2 image de A'_2 à travers le dioptre.

2. Image A_2 de A_1 :

$$A_1 \xrightarrow{\text{Dioptre}} A'_1 \xrightarrow{\text{Miroir}} A'_2 \xrightarrow{\text{Dioptre}} A_2$$

a- $A_1 \xrightarrow{\text{Dioptre}} A'_1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{n_2}{\overline{S_1A'_1}} - \dfrac{n_1}{\overline{S_1A_1}} = \dfrac{n_2 - n_1}{\overline{S_1C}}$ (1)

b- $A'_1 \xrightarrow{\text{Miroir}} A'_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\overline{S_2A'_2}} + \dfrac{1}{\overline{S_2A'_1}} = \dfrac{2}{\overline{S_2C}}$ (2)

c- $A'_2 \xrightarrow{\text{Dioptre}} A_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{n_1}{\overline{S_1A_2}} - \dfrac{n_2}{\overline{S_1A'_2}} = \dfrac{n_1 - n_2}{\overline{S_1C}}$ (3)

avec : $\overline{S_1C} = R$; $\overline{S_1A_1} = d = -\dfrac{R}{2} = -\dfrac{\overline{S_1C}}{2}$; $\overline{S_2C} = -R$

$n_1 = 1$ et $n_2 = 3/2$

soit : (1) $\rightarrow \dfrac{2}{3\,\overline{S_1A'_1}} + \dfrac{2}{R} = \dfrac{1}{2R} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_1A'_1} = -R$

(2) $\rightarrow \dfrac{1}{\overline{S_2A'_2}} - \dfrac{1}{3R} = \dfrac{2}{-R} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_2A'_2} = -\dfrac{3}{5}R$

(3) $\rightarrow \dfrac{1}{\overline{S_1A_2}} - \dfrac{15}{14R} = \dfrac{-1}{2R} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_1A_2} = \dfrac{7}{4}R$

3. Foyers du système:

Le foyer image F' est l'image d'un point objet A_1 à l'infini dans la direction de l'axe : $A_2 \equiv F'$, avec: $\overline{S_1A_1} \rightarrow \infty$ et $\dfrac{1}{\overline{S_1A_1}} = 0$

d'où (1) $\rightarrow \dfrac{3}{2\,\overline{S_1A'_1}} = \dfrac{1}{2R} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_1A'_1} = 3R$

(2) $\rightarrow \dfrac{1}{\overline{S_2A'_2}} = -\dfrac{3}{R} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_2A'_2} = -\dfrac{R}{3}$

(3) $\rightarrow \dfrac{1}{\overline{S_1F'}} = \dfrac{7}{5R} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_1F'} = \dfrac{5}{7}R$

Le foyer objet F est le conjugué d'un point image A'_2 à l'infini dans la direction de l'axe : $A_1 \equiv F$, avec: $\overline{S_1A'_2} \rightarrow \infty$ et $\dfrac{1}{\overline{S_1A'_2}} = 0$

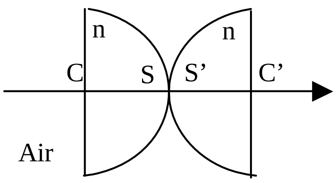
D'où : (3) $\rightarrow -\dfrac{3}{2\,\overline{S_1A'_2}} = \dfrac{-1}{2R} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_1A'_2} = 3R$

(2) $\rightarrow \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\overline{S_2A'_1}} = \dfrac{2}{-R} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_2A'_1} = -\dfrac{R}{3}$

(1) $\rightarrow \dfrac{9}{10R} - \dfrac{1}{\overline{S_1F}} = \dfrac{1}{2R} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_1F} = \dfrac{5}{2}R$

EP.7.15. : Demi boules accolées

On considère un système optique formé par deux demi boules en verre d'indice n = 1,5 placées dans l'air , de même rayon R et dont les sommets S et S' sont confondus. On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.



Trouver la position du foyers image F ' du système optique ainsi formé. En déduire celle du foyer objet F.

Solution.

Cherchons la position de l'image d'un objet A situé à l'infini donnée par ce système. Ce système optique est la succession de quatre dioptres , le premier et le dernier étant des dioptres plans et les second et troisième des dioptres sphériques de sommets S et S' .

Le dioptre plan P_C donne du point A une image A' également à l'infini. L'image de A' donnée par le dioptre sphérique D_S se forme au foyer image F'_S de ce dioptre. Le dioptre sphérique $D_{S'}$ donne de F'_S une image A" dont l'image à travers le dioptre plan $P_{C'}$ est le foyer image F' du système :

$$A_\infty \xrightarrow{P_C} A'_\infty \xrightarrow{D_S} F'_S \xrightarrow{D_{S'}} A'' \xrightarrow{P_{C'}} F' .$$

avec $\overline{S'F'_S} = -\dfrac{1}{n-1}\,\overline{SC} = \dfrac{1}{n-1}R$

et $\dfrac{1}{\overline{S'F'_S}} - \dfrac{n}{\overline{S'A''}} = \dfrac{1-n}{\overline{S'C'}}$ où $\overline{S'C'} = R$ et $S \equiv S'$

On en déduit que : $\overline{S'A''} = \dfrac{n}{2(n-1)}R$

.

Le dioptre plan $P_{c'}$ donne :

$$\frac{\overline{C'A''}}{n} = \frac{\overline{C'F'}}{1}$$

On trouve alors : $\overline{C'F'} = \dfrac{2-n}{2\,n\,(n-1)}\,R$

Le système optique constitué des deux demi-boules est symétrique par rapport à S (qui est confondu avec S'). D'après le principe du retour inverse de la lumière, le foyer objet F de ce système est donc le symétrique de F' par rapport à S. D'où ,

$$\overline{CF} = -\ \frac{2-n}{2\,n\,(n-1)}\ R$$

EP.7.16. : Verre chinois

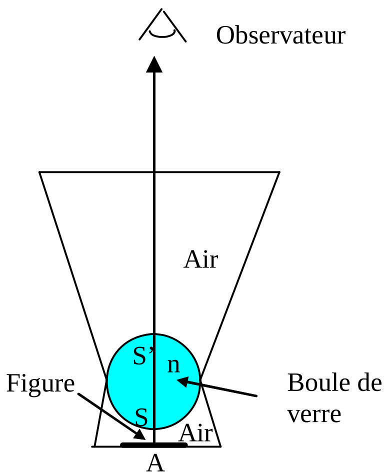
Certains verres chinois sont dits « magiques » !

Ils sont constitués de deux compartiments séparés par une boule transparente de sorte que le fond du verre reste toujours rempli d'air.

Une figure placée au fond du verre est invisible lorsque le verre est vide et apparaît lorsque le verre est rempli d'un liquide transparent.

Ce phénomène qui semble paradoxal peut s'expliquer en étudiant les deux systèmes : le verre vide et le verre plein.

On désigne par n l'indice de la boule, R son rayon, C son centre , SS' son diamètre et d = AS la distance du centre A de la figure au sommet inférieur S de la boule.



Verre vide

1.Etude du verre vide.

1.a. Déterminer les positions des foyers objet et image F_1 et F'_1 du dioptre sphérique de sommet S ainsi que les positions des foyers objet et image F_2 et F'_2 du dioptre sphérique de sommet S'.

1.b. Tracer la marche des rayons lumineux issus de A. Conclure.

2. Etude du verre plein.

On considère maintenant le verre rempli d'un liquide d'indice n' sur une hauteur h mesurée à partir de S'.

2.a. Déterminer les positions des foyers objet et image F_2 et F'_2 du dioptre sphérique de sommet S'.

2.b. Trouver la position de l'image finale A_F de A et montrer que la figure devient visible.

On donne : n = 1,5 ; n' = 1,3 ; R = 1 cm ; d = 0,5 cm et h = 1 cm.

Solution

Etude du verre vide

1.a. On a : $\overline{SF'_1} = \dfrac{n}{n-1}\overline{SC} = 3\,\overline{SC} = 3$ cm

et $\overline{SF_1} = \dfrac{1}{1-n}\overline{SC} = -2\,\overline{SC} = -2$ cm

On a de même $\overline{S'F'_2} = \dfrac{1}{1-n}\overline{S'C} = -2\,\overline{S'C} = 2$ cm

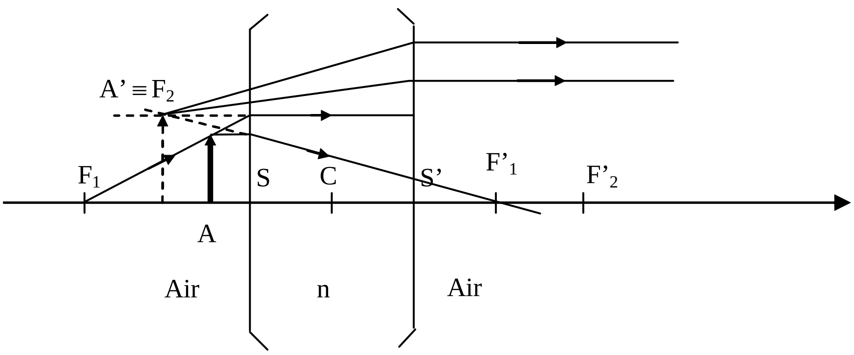
et $\overline{S'F_2} = \dfrac{n}{n-1}\overline{S'C} = 3\,\overline{S'C} = -3$ cm

1.b. Le dioptre sphérique de sommet S donne de A une image A' :

$A \xrightarrow{D_S} A'$ avec $\overline{SA} = -0{,}5$ cm

La relation de conjugaison $\dfrac{1}{\overline{SA}} - \dfrac{n}{\overline{SA'}} = \dfrac{1-n}{\overline{SC}}$ donne $\overline{SA'} = -1$ cm

ce qui entraîne que $\overline{S'A'} = -3$ cm. : A' est donc confondu avec le foyer objet F_2 du second dioptre de sommet S' :



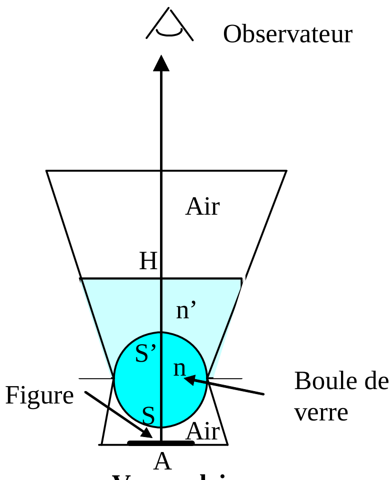
Le dioptre de sommet S' donne donc de A' une image qui se forme à l'infini derrière l'observateur. Celui-ci ne la verra donc pas .

2. Etude du verre plein

2.a. Le premier dioptre de sommet S est inchangé. Il donne de A une image A' telle que $\overline{SA'} = -1$ cm et l'on a $\overline{S'A'} = -3$ cm.

En revanche le second dioptre de sommet S' est modifié puisque l'indice du milieu final est maintenant n', indice du liquide. Les nouveaux foyers objet F_2 et image F'_2 sont donnés par

$$\overline{S'F'_2} = \frac{n'}{n'-n}\,\overline{S'C} = 6{,}5 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \overline{SF_2} = \frac{n}{n-n'}\,\overline{S'C} = -\,7{,}5 \text{ cm}$$

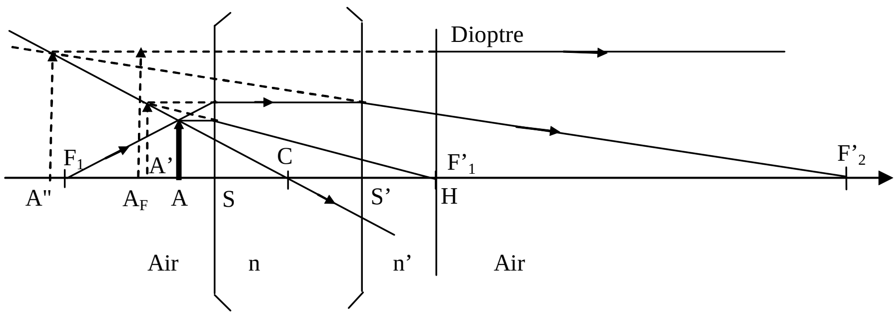


Verre plein

2.b. Le dioptre de sommet S' donne de A' une image A" telle que :

$$\frac{n}{\overline{S'A'}} - \frac{n'}{\overline{S'A''}} = \frac{n - n'}{\overline{S'C}}$$

Ce qui donne : $\overline{S'A''} = -\,4{,}33$ cm.



La position de l'image finale A_F à travers le dioptre plan liquide-air est donnée par :

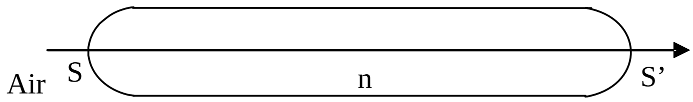
$$\frac{\overline{HA''}}{n'} = \overline{HA_F} = -\,4{,}1 \text{ cm.}$$

Il s'agit d'une image virtuelle située à 6 mm en arrière de A.

Un observateur placé au dessus du verre pourra donc la voir. Elle va paraître plus éloignée qu'elle ne l'est en réalité.

EP.7.17. : Baguette de verre à bouts sphériques

Une baguette de verre de longueur e et d'indice n est limitée par deux calottes sphériques de même rayon R et de sommets S et S'. Cette baguette est. placée dans l'air



La longueur de la baguette est donnée par e = $\overline{SS'}$

On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.

1. Trouver la position des foyers objet et image de chacun des dioptres sphériques.

2. Déterminer la position du foyer image F' de la baguette. Trouver, ans faire de calcul, la position du foyer objet F. Justifier votre réponse.

3. Quelle relation doit-il exister entre la longueur e, le rayon R et l'indice n pour que la baguette soit un système optique afocal ?

Trouver dans ce cas une relation particulière entre les foyers des deux dioptres.

Application numérique : n = 1,50 et R = 2 cm.

Solution

1. Pour le premier dioptre de sommet S, les foyers objet F_1 et image F'_1 sont donnés par :

$$\overline{SF_1} = \frac{1}{1-n}\overline{SC} = -\frac{1}{n-1}R \quad \text{et} \quad \overline{SF'_1} = \frac{n}{n-1}\overline{SC} = \frac{n}{n-1}R\ .$$

Pour le second dioptre de sommet S', les foyers objet F_2 et image F'_2 sont donnés par :

$$\overline{S'F_2} = \frac{n}{n-1}\overline{S'C} = -\frac{n}{n-1}R \quad \text{et} \quad \overline{S'F'_2} = \frac{1}{1-n}\overline{S'C} = \frac{1}{n-1}R\ .$$

2. Le foyer image F' du système est l'image d'un objet situé à l'infini dans la direction de l'axe :

$$\infty \xrightarrow{1^{er}\ \text{dioptre}} F'_1 \xrightarrow{2^{ème}\ \text{dioptre}} F'$$

On a : $$\frac{n}{\overline{S'F'_1}} - \frac{1}{\overline{S'F'}} = \frac{n-1}{\overline{S'F'}}$$

D'où $$\overline{S'F'} = \frac{nR - e(n-1)}{(1-n)\left(2nR - e(n-1)\right)}$$

La baguette est un système optique centré, son centre optique O est confondu avec le milieu du segment SS'. Ainsi, d'après le principe du retour inverse de la lumière, les foyers objet et images sont nécessairement symétriques par rapport à O. La position du foyer objet F de la baguette est donc déduite de celle du foyer image F' et l'on a :

$$\overline{SF} = -\frac{nR - e(n-1)}{(1-n)\left(2nR - e(n-1)\right)}$$

3. Pour que ce système soit afocal, il faut que les foyers objet F et image F’ soient rejetés à l’infini, on a donc la relation

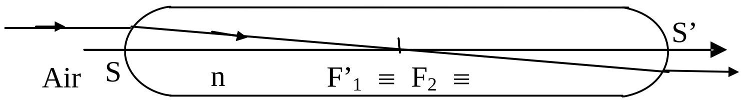
$$2nR - e(n-1) = 0. \qquad \text{D'où} \qquad e = \frac{2nR}{n-1}.$$

Pour n = 1,5 et R = 2 cm , on trouve e = 6R = 0,12 m.

Dans ce cas, le foyer image F'_1 du premier dioptre est confondu avec le foyer objet F_2 du second dioptre :

$$\overline{SF'_1} = \frac{n}{n-1}R = 3R$$

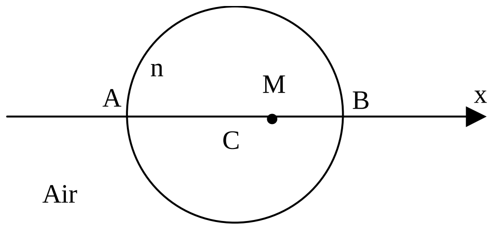
$$\overline{S'F_2} = -\frac{n}{n-1}R = -3R$$



EP.7.18. : Distance objet–image dans un ballon rempli de liquide

Un ballon sphérique d’épaisseur négligeable, de centre C et de rayon R, est rempli d’un liquide d’indice n. On considère un point lumineux M qui se déplace le long du diamètre AB à l’intérieur de ce ballon et M’ son image après une réfraction à travers la surface du ballon. On repère les positions de M et de M’ par x = $\overline{CM}$ **et x’ =** $\overline{CM'}$**.**

On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.



1. Trouver l’expression de la position de M’ en fonction de celle de M.

2. Montrer que lorsque le point M se déplace de A à B, la distance $\overline{MM'}$ **passe par un maximum. Trouver la position M_0 de M correspondante.**

3. Calculer les grandissements linéaires lorsque M est en A, en M_0 et en B.

On donne : n = $\frac{4}{3}$ **et R = 25 cm.**

Solution

1. M' est l'image de M par le dioptre sphérique D liquide-air de sommet B.

On a donc : $\dfrac{n}{\overline{CM'}} - \dfrac{1}{\overline{CM}} = \dfrac{n-1}{\overline{CB}}$

D'où : $\dfrac{n}{x'} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{n-1}{R}$ et $x' = \dfrac{n\,R\,x}{R+(n-1)x}$.

2. $\overline{MM'} = \overline{MC} + \overline{CM'} = x' - x = \dfrac{n\,R\,x}{R+(n-1)x} - x$.

Pour que la distance $\overline{MM'}$ passe par un extremum, il faut que sa dérivée par rapport à x s'annule :

$$\frac{d\left(\overline{MM'}\right)}{dx} = 0 \quad \text{ce qui entraîne} \quad \frac{n\,R^2}{\left[R+(n-1)x\right]^2} = 1$$

soit encore $R + (n-1)x = \pm\sqrt{n}\,R$

Les solutions de cette équation sont :

$$x_0 = \frac{\left(\sqrt{n}-1\right)R}{n-1} \quad \text{et} \quad x_1 = -\frac{\left(\sqrt{n}+1\right)R}{n-1}$$

La solution x_1 n'est pas acceptable car le point serait dans ce cas à l'extérieur de la boule avec $x_1 = -6{,}47$ R . La solution $x_0 = 0{,}46$ R est acceptable.

En effectuant le calcul de la dérivée aux points x = 0 et x = R, on trouve que $\dfrac{d\left(\overline{MM'}\right)}{dx} > 0$ pour x = 0 et $\dfrac{d\left(\overline{MM'}\right)}{dx} < 0$ pour x = R. On vérifie bien qu'il s'agit d'un maximum en $x = x_0$.

La position de M qui correspond donc au maximum est donnée par :
$x_0 = 0{,}115$ m. c'est à dire que M se situe entre C et B.

On calcule la distance $\overline{M_0M'_0} = 3R\left(\sqrt{n}-1\right)^2 = 0{,}018$ m = 1,8 cm.

3. Le grandissement est donné par la relation $\gamma = \dfrac{\overline{CM'}}{\overline{CM}} = \dfrac{x'}{x} = \dfrac{n\,R}{R+(n-1)x}$

Lorsque M est en A : x = -R et $\gamma = \dfrac{n}{2-n} = 2$

Lorsque M est en M_0 : $x = x_0$ et $\gamma = \sqrt{n} = 1{,}15$
Lorsque M est en B : x = R et $\gamma = 1$.

CHAPITRE 8

LES LENTILLES

Les lentilles sont de beaucoup les éléments les plus employés dans les instruments et les montages optiques. On les trouve aussi bien dans la vie courante (lunettes, lentilles de contact, appareils photographiques) que dans le domaine de la recherche scientifique (télescopes, spectrographes, microscope). Elles sont formées par l'association de deux dioptres sphériques ou d'un dioptre sphérique et d'un dioptre plan limitant un milieu homogène et transparent d'indice n.

Nous allons d'abord présenter les différentes formes de lentilles ainsi que leurs différentes caractéristiques (sommet, centre, axe optique, rayon de courbure, foyers, vergence …). On construira ensuite la marche des rayons lumineux et la position des images et on établira les formules de conjugaison donnant ces positions à partir de diverses origines (centre, sommet et foyers). On présentera enfin quelques constructions fondamentales et on montrera comment l'association de deux lentilles (doublet) peut améliorer la performance d'un instrument en augmentant son agrandissement.

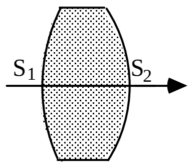
1. Définitions

Une lentille est un milieu transparent homogène d'indice n limité par deux dioptres dont l'un au moins est sphérique, l'autre pouvant être, à la limite, plan. C'est un système centré dont l'axe est la droite qui joint les deux centres des dioptres respectifs.

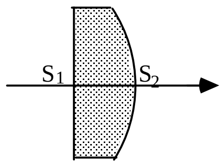
L'épaisseur d'une lentille est la distance S_1S_2 où S_1 et S_2 sont les sommets des deux dioptres. Une **lentille** est dite **mince ou épaisse** selon que son épaisseur est ou n'est pas petite devant les rayons de courbure de ses deux faces et devant leur différence si ceux-ci sont de même sens.

Il existe six formes possibles de lentilles :

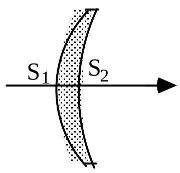
- lentilles biconvexes
- lentilles biconcaves
- lentilles plan-convexe
- lentilles plan-concaves
- ménisques à bords minces
- ménisques à bords épais



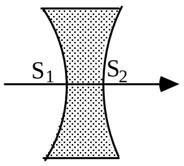
lentille biconvexe



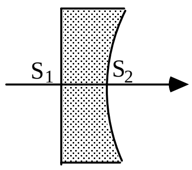
lentille plan-convexe



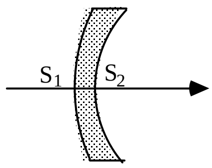
ménisque à bords minces



lentille biconcave



lentille plan-concave



ménisque à bords épais

Les trois premières sont à bords minces, c'est-à-dire que le pourtour de la lentille est plus mince que son centre, et les trois dernières sont à bords épais.

Une lentille est caractérisée par :

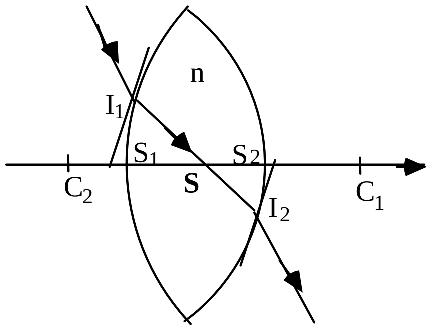
- les sommets S_1 et S_2 des dioptres dans l'ordre où la lumière les rencontre,
- l'axe optique (Δ) orienté dans le sens de propagation de la lumière,
- les centres C_1 et C_2 des dioptres qui sont portés par l'axe optique,
- les rayons de courbure $R_1 = \overline{S_1C_1}$ et $R_2 = \overline{S_2C_2}$ des dioptres dont l'un est infini si l'un des dioptres est plan,
- l'indice n de la lentille et ceux des milieux extrêmes.

Nous n'étudierons que les cas où les lentilles sont placées dans un même milieu (les milieux extrêmes ont même indice) et plus particulièrement le cas où ce milieu est l'air .

Etant formée par l'association de deux dioptres, une lentille est donc un système optique qui **ne réalise pas le stigmatisme rigoureux** (sauf dans des cas très particuliers pour certaines lentilles) mais elle réalise le stigmatisme approché dans les conditions de l'approximation de Gauss.

2. Centre optique

Le centre optique est un point de l'axe, appartenant au milieu n, tel qu'un rayon passant par ce point émerge de la lentille parallèlement au rayon. incident.



La lentille se comporte alors localement comme une lame à faces parallèles : les plans tangents aux points d'incidence I_1 et d'émergence I_2 sont parallèles. Les droites C_1I_1 et C_2I_2, normales à ces plans tangents, sont parallèles. Le rayon intérieur I_1I_2 rencontre l'axe en S .

Les triangles SC_1I_1 et SC_2I_2 sont semblables et permettent d'écrire :

$$\frac{\overline{I_1C_1}}{\overline{I_2C_2}} = \frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC_2}} \qquad (1)$$

Dans les conditions de l'approximation de Gauss; les triangles curvilignes $S_1C_1I_1$ et $S_2C_2I_2$ se confondent avec des triangles rectangles respectivement en S_1 et S_2 et l'on a :

$$\frac{\overline{I_1C_1}}{\overline{I_2C_2}} = \frac{\overline{S_1C_1}}{\overline{S_2C_2}} \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent alors :

$$\frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC_2}} = \frac{\overline{S_1C_1}}{\overline{S_2C_2}} = \frac{\overline{SC_1} - \overline{S_1C_1}}{\overline{SC_2} - \overline{S_2C_2}} = \frac{\overline{SS_1}}{\overline{SS_2}} \qquad (3)$$

Le point S qui partage le segment S_1S_2 dans le rapport des rayons de courbure ($\frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC_2}} = \frac{R_1}{R_2}$) est donc un point particulier appelé "**centre optique** ".

La relation (3) permet d'écrire également :

$$\frac{\overline{SS_1}}{\overline{S_1C_1}} = \frac{\overline{SS_2}}{\overline{S_2C_2}} = \frac{\overline{SS_2} - \overline{SS_1}}{\overline{S_2C_2} - \overline{S_1C_1}} = \frac{\overline{S_1S_2}}{R_2 - R_1}$$

soit : $\overline{SS_1} = \frac{R_1}{R_2 - R_1} \overline{S_1S_2}$

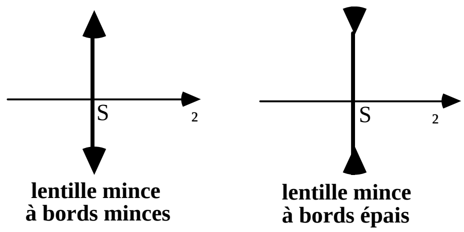
$\overline{SS_2} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \overline{S_1S_2}$

Si la lentille est mince, $\overline{S_1S_2}$ est petit par rapport à R_1 , R_2 et R_2 - R_1 , **S se confond alors avec S_1 et S_2.**

Avec cette approximation, **un rayon incident passant par S ne subit ni déviation ni déplacement latéral à la traversée de la lentille**.

Nous nous placerons, dans la suite, dans le cas de lentilles minces placées dans l'air et nous les représenterons par une droite perpendiculaire à l'axe optique en S.

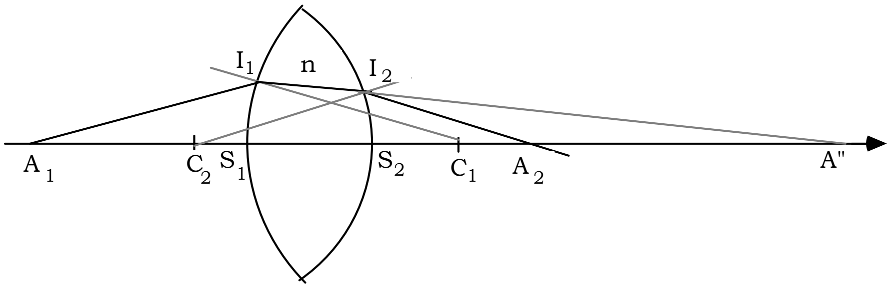
Nous différencierons les **lentilles minces à bords minces** des **lentilles minces à bords épais** par des flèches de sens opposés placées aux extrémités de cette droite comme le montre la figure ci-après.



3. Marche d'un rayon lumineux

Un rayon incident A_1I_1 sur le premier dioptre donne un rayon réfracté I_1I_2A" dans le milieu d'indice n. Ce rayon donne, après réfraction sur le deuxième dioptre, un rayon I_2A_2 dans l'air.

A" est l'image intermédiaire de A_1 et A_2 est l'image définitive de A_1 donnée par la lentille.



La relation entre les positions de l'objet et de l'image (première formule de conjugaison) du dioptre sphérique avec origine au sommet donne pour :

la première réfraction $$\frac{1}{\overline{S_1A_1}} - \frac{n}{\overline{S_1A''}} = \frac{1-n}{\overline{S_1C_1}} \qquad (4)$$

la deuxième réfraction $$\frac{n}{\overline{S_2A''}} - \frac{1}{\overline{S_2A_2}} = \frac{n-1}{\overline{S_2C_2}} \qquad (5)$$

La somme membre à membre des relations (4) et (5) donne :

$$\frac{1}{\overline{S_1A_1}} - \frac{1}{\overline{S_2A_2}} - n\left(\frac{1}{\overline{S_1A''}} - \frac{1}{\overline{S_2A''}}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{S_2C_2}} - \frac{1}{\overline{S_1C_1}}\right)$$

Dans le cas des **lentilles minces** pour lesquelles S_1, S_2 et S sont confondus, la relation précédente se simplifie et on obtient la **relation de conjugaison avec origine au centre optique S :**

$$\boxed{\frac{1}{\overline{SA_1}} - \frac{1}{\overline{SA_2}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)} \qquad (6)$$

Remarque : dans le cas où l'un des dioptres est plan, il suffit de remplacer dans la relation (6) R_1 ou R_2 par l'infini.

4. Foyers. Distance focale. Vergence

Comme tout système centré à faces sphériques, une lentille mince possède deux foyers principaux et deux plans focaux perpendiculaires à l'axe optique et coupant celui-ci respectivement au foyer objet F_1 et au foyer image F_2.

4.1. Position des foyers

La relation (6) permet de trouver la position des foyers :

4.1.1. Foyer image F_2

En faisant tendre $\overline{SA_1}$ vers l'infini, on a :

$$-\frac{1}{\overline{SF_2}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

soit : $$\overline{SF_2} = f' = \frac{1}{n-1}\,\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$$

f' est appelée “ ***distance focale*** ” de la lentille.

4.1.2. Foyer objet F_1

En faisant tendre $\overline{SA_2}$ vers l'infini; on a :

$$\frac{1}{\overline{SF_1}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

soit : $$\overline{SF_1} = f = \frac{1}{n-1}\,\frac{R_1R_2}{R_1 - R_2}$$

Nous remarquons que $\overline{SF_1}$ et $\overline{SF_2}$ sont opposés :

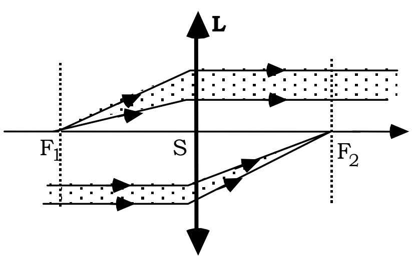
$$\overline{SF_2} = -\ \overline{SF_1} = f'$$

Les **foyers principaux sont donc symétriques par rapport au centre optique S** , même si la forme de la lentille n'est pas symétrique.

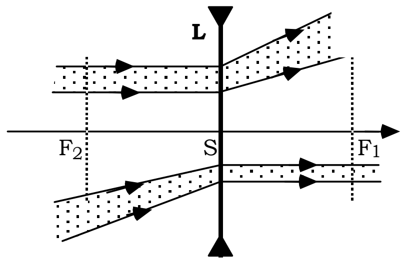
Cette symétrie des foyers par rapport à la lentille montre qu'il n'y a, du point de vue de la formation des images, que deux sortes de lentilles minces :

- les **lentilles convergentes (ou lentilles minces à bords minces)** où F est dans le milieu objet; F_2 est alors dans le milieu image et **les deux foyers sont réels**,

- les **lentilles divergentes (ou lentilles minces à bords épais)** dont **les deux foyers sont virtuels**.



Lentille convergente



Lentille divergente

4.2. Vergence d'une lentille

La vergence d'une lentille est la quantité $C = \dfrac{1}{\overline{SF_2}} = \dfrac{1}{f'}$ inverse de la distance focale. **Elle est positive si la lentille est convergente, négative si la lentille est divergente**.

La vergence est exprimée en dioptries si on mesure la distance focale en mètres; elle est donc donnée par la quantité :

$$\boxed{C = \frac{1}{\overline{SF_2}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

5. Relation de conjugaison

5.1. Relation de conjugaison avec origine au centre optique S

Nous avons vu au paragraphe 3 que la relation de conjugaison avec origine au centre optique S s'écrivait :

$$\frac{1}{\overline{SA_2}} - \frac{1}{\overline{SA_1}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

En utilisant l'expression de la vergence, cette relation s'écrit:

$$\boxed{\frac{1}{\overline{SA_2}} - \frac{1}{\overline{SA_1}} = \frac{1}{\overline{SF_2}} = -\frac{1}{\overline{SF_1}}} \qquad (7)$$

5.2. Relation de conjugaison avec origine aux foyers

Injectons F et F_2 au dénominateur de la relation précédente; on obtient :

$$\frac{1}{\overline{SF_2} + \overline{F_2A_2}} - \frac{1}{\overline{SF_1} + \overline{F_1A_1}} = \frac{1}{\overline{SF_2}}$$

qui donne, en remarquant que $\overline{SF_1} = - \overline{SF_2}$:

$$\boxed{\mathbf{\overline{F_1A_1}.\overline{F_2A_2} = \overline{F_1S}.\overline{F_2S} = \overline{SF_1}.\overline{SF_2} = ff' = -f^2 = -f'^2}} \qquad (8)$$

6. Image d'un petit objet perpendiculaire à l'axe

Pour construire l'image d'un objet AB, nous procèderons, comme dans le cas des miroirs et des dioptres sphériques, par l'utilisation de rayons particuliers issus de B.

6.1. Rayons particuliers

L'image B_2 de l'extrémité B_1 d'un objet $\overrightarrow{A_1B_1}$ est donnée par l'intersection des rayons suivants :

* le rayon SB_1 passant par le centre optique S et ne subissant aucune déviation,
* le rayon B_1F_1 passant par le foyer objet et sortant parallèle à l'axe,
* le rayon B_1I parallèle à l'axe et émergent par le foyer image F_2.

6.2. Quelques constructions

6.2.1. Discussion

* Si l'objet est placé avant le foyer objet F_1 ($\overline{F_1A_1} < 0$), l'image se trouve après le foyer image F_2 ($\overline{F_2A_2} > 0$); l'objet est réel et :

- lorsque la lentille est convergente l'image est réelle ,
- lorsque la lentille est divergente l'image est
  - réelle si $|\overline{F_1A_1}| > |f'|$ ($|\overline{F_2A_2}| < |f'|$)
  - virtuelle si $|\overline{F_1A_1}| < |f'|$ ($|\overline{F_2A_2}| > |f'|$)

* L'image et l'objet se déplacent dans le même sens que la lentille soit convergente ou divergente.

6.2.2. Image d'un objet réel placé entre F_1 et S

Lentille convergente

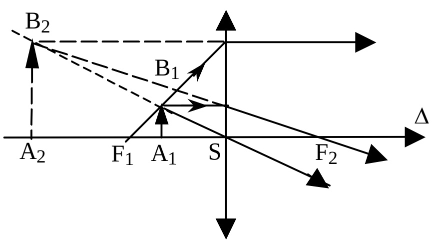


Image virtuelle droite

Lentille divergente

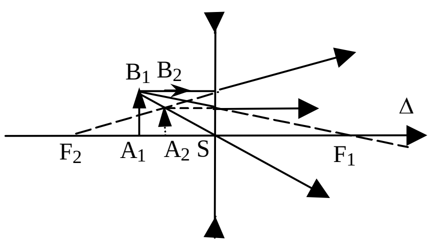
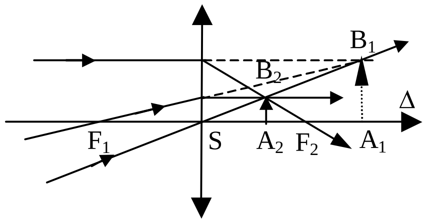


Image virtuelle droite

6.2.3. Image d'un objet virtuel

Lentille convergente **Lentille divergente**



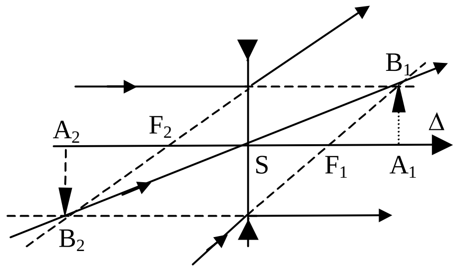


Image réelle droite **Image virtuelle renversée**

6.3. Généralisation

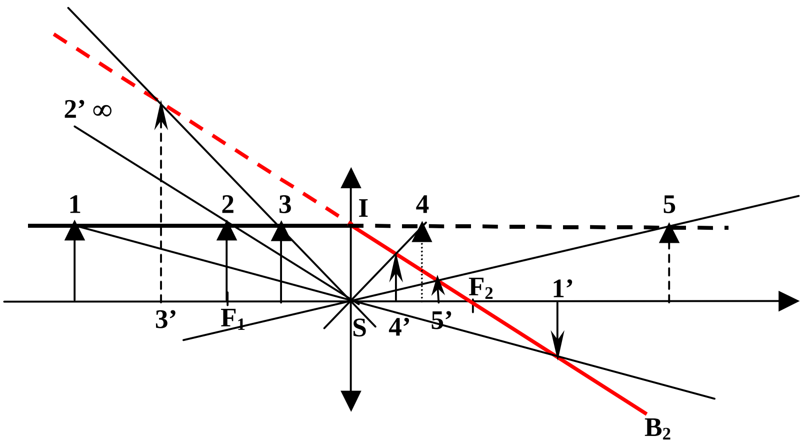
L'objet $\overrightarrow{A_1B_1}$, de hauteur constante, est placé dans différentes positions (de 1 à 5).

L'objet ayant une grandeur constante, les rayons B_1I sont parallèles à l'axe et émergent suivant la direction fixe IF_2. **La direction IF_2 est donc le lieu des points B_2**

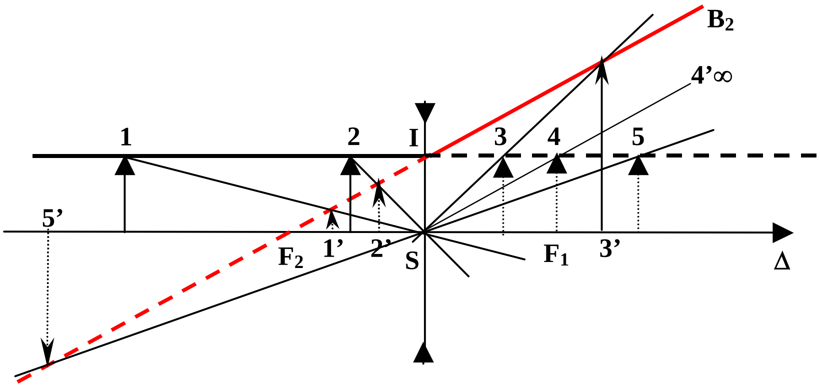
Un des rayons particuliers qui permet la construction de l'image $\overrightarrow{A_2B_2}$ de l'objet $\overrightarrow{A_1B_1}$ est le rayon SB_1 qui ne subit aucune déviation.

Pour chaque position de l'objet $\overrightarrow{A_1B_1}$, l'image B_2 (de 1' à 5') de l'extrémité B_1 de l'objet est donnée par l'intersection des droites IF_2 et SB_1.

<u>Lentille mince convergente</u>



Lentille mince divergente



7. Grandissement linéaire transversal

Soit $\overrightarrow{A_1B_1}$ un objet perpendiculaire à l'axe; le premier dioptre en donne une image $\overrightarrow{A'B'}$ dans le milieu de la lentille; le deuxième dioptre donne de $\overrightarrow{A'B'}$ l'image définitive $\overrightarrow{A_2B_2}$

7.1. Origine au centre optique S

Méthode analytique

Les formules du dioptre donnent respectivement pour $\overline{A'B'}$ et $\overline{A_2B_2}$:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{1}{n}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA_1}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A'B'}} = \frac{n}{1}\frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA'}}$$

En multipliant les deux relations on obtient :

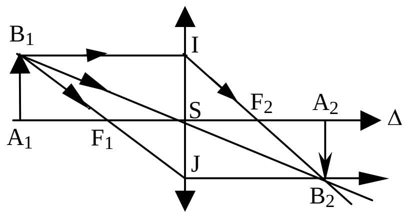
$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}}} \qquad (9)$$

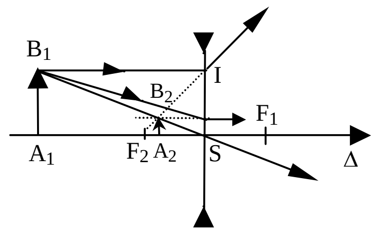
et dans le cas où les milieux extrêmes sont différents :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{n_1}{n_2}\frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}}}$$

Méthode graphique

Considérons sur les figures suivantes les triangles semblables SA_1B_1 et SA_2B_2





On a
$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}}}$$

7.2. Origine aux foyers

Les triangles semblables F_1SJ, $F_1A_1B_1$ d'une part et F_2SI, $F_2A_2B_2$ d'autre part permettent d'écrire :

$$\frac{\overline{SJ}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{F_1S}}{\overline{F_1A_1}}$$

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{F_2A_2}}{\overline{F_2S}}$$

soit :
$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{F_1S}}{\overline{F_1A_1}} = \frac{\overline{F_2A_2}}{\overline{F_2S}}} \qquad (10)$$

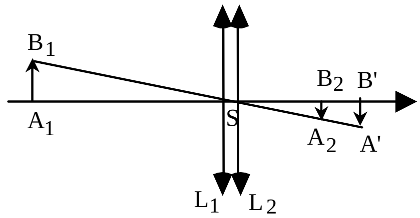
8. Association de lentilles

On considère deux lentilles L_1 et L_2 de centres optiques S_1 et S_2, de distances focales $f'_1 = \overline{S_1F'_1}$ et $f'_2 = \overline{S_2F'_2}$ et dont les axes optiques sont confondus. Leur association réalise un système appelé "***doublet*** ".

8.1. Doublet accolé

Les centres optiques S_1 et S_2 des deux lentilles L_1 et L_2 sont tels que la distance S_1S_2 peut être considérée comme nulle et S_1 et S_2 sont confondus en S.

La lentille L_1 donne d'un petit objet A_1B_1 une image A'B' dont la lentille L_2 donne l'image définitive A_2B_2.



On peut écrire :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA_1}} = \frac{1}{f'_1} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA_1}}$$

$$\frac{1}{\overline{SA_2}} - \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{1}{f'_2} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA'}}$$

Soit :

$$\frac{1}{\overline{SA_2}} - \frac{1}{\overline{SA_1}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}}$$

Ce sont les relations de conjugaison d'une **lentille unique** de distance focale f ' telle que :

$$\boxed{\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}}$$

On peut encore écrire en introduisant les vergences C_1 et C_2 de chaque lentille du doublet et la vergence C de la lentille équivalente :

$$\boxed{C = C_1 + C_2}$$

8.2. Doublet non accolé

Posons : $d = \overline{F'_1 F_2}$ et $e = \overline{S_1S_2}$.

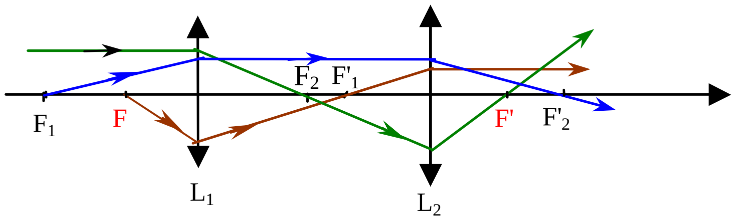
$$\overline{F'_1 F_2} = \overline{F'_1 S_1} + \overline{S_1S_2} + \overline{S_2F_2} = - f'_1 + e - f'_2 = d$$

Cherchons les éléments de la lentille L équivalente au doublet, de foyers F et F' et de distance focale f '. On constate que :

- Tout rayon incident qui émerge du doublet parallèlement à l'axe, passe par le foyer objet F de la lentille équivalente L. Or ce rayon passe par le foyer objet F_2 de la lentille L_2. Le foyer F_2 est donc l'image de F donnée par la lentille L_1.

- Tout rayon incident parallèle à l'axe émergera du doublet en passant par un point qui représente donc le foyer image F' de la lentille équivalente L. Or ce rayon passe par le foyer image F'_1 de L_1. F' est donc l'image de F'_1 donnée par la lentille L_2 .

- Tout rayon incident passant par F_1 émerge du doublet en passant par F'_2 . F'_2 est donc l'image de F_1 donnée par le doublet ou par la lentille équivalente L.



On peut donc écrire, en utilisant les formules de conjugaison avec origine aux foyers :

$$F \xrightarrow{L_1} F_2 \;\Rightarrow\; \overline{F_1F}\cdot\overline{F'_1F_2} = -f'^2_1 \;\Rightarrow\; \overline{F_1F} = -\frac{f'^2_1}{d}$$

$$F'_1 \xrightarrow{L_2} F' \;\Rightarrow\; \overline{F_2F'_1}\cdot\overline{F'_2F'} = -f'^2_2 \;\Rightarrow\; \overline{F'_2F'} = -\frac{f'^2_2}{-d} = \frac{f'^2_2}{d}$$

$$F_1 \xrightarrow{L} F'_2 \;\Rightarrow\; \overline{FF_1}\cdot\overline{F'F'_2} = -f'^2$$

avec **d < 0**

Soit :

$$-f'^2 = \left(\frac{f'^2_1}{d}\right)\left(\frac{-f'^2_1}{d}\right) = \left(\frac{-f'_2\,f'_1}{d}\right)^2$$

$$-f' = \frac{f'_1\,f'_2}{d}$$

et

$$\frac{1}{f'} = -\frac{d}{f'_1\,f'_2} = \frac{f'_2 + f'_1 - e}{f'_1\,f'_2}$$

Le doublet est donc équivalent à une lentille unique L de distance focale f' telle que :

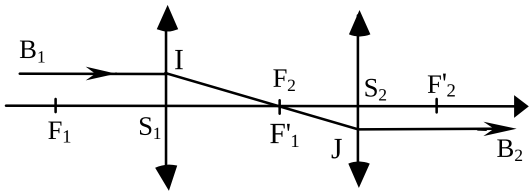
$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1\,f'_2}$$

On retrouve la relation du doublet accolé pour e = 0.

8.3. Doublet afocal

Dans un tel doublet les foyers F'_1 et F_2 sont confondus (d = 0).

Tout rayon incident parallèle à l'axe émerge du doublet parallèlement à l'axe. Si l'objet A_1B_1 se déplace sur l'axe en gardant la même grandeur, B_1 parcourt la droite parallèle à l'axe passant par I. L'image A_2B_2 garde elle aussi une grandeur constante et B parcourt la droite parallèle à l'axe passant par J. Le grandissement HG est indépendant de la position de l'objet.



En effet, on a :

$$\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{S_1I}}{\overline{S_2J}} = \frac{\overline{S_1F'_1}}{\overline{S_2F'_2}} = -\frac{f'_2}{f'_1}$$

Par ailleurs on peut écrire :

pour L_1: $\overline{F_1A_1}\,.\,\overline{F'_1A'} = f_1f'_1 \Rightarrow \gamma_1 = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{F'_1A'}}{\overline{F'_1S_1}} = -\dfrac{\overline{F'_1A'}}{f'_1} = -\dfrac{f_1}{\overline{F_1A_1}}$

pour L_2 : $\overline{F_2A'}\,.\,\overline{F'_2A_2} = f_2f'_2 \Rightarrow \gamma_2 = \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{F_2S_2}}{\overline{F_2A'}} = -\dfrac{f'_2}{\overline{F_2A'}} = -\dfrac{\overline{F'_2A_2}}{f_2}$

soit $\qquad \gamma = -\dfrac{f'_2}{f'_1} = \gamma_1\gamma_2 = \dfrac{f_1}{\overline{F_1A_1}}\,\dfrac{\overline{F'_2A_2}}{f_2}$

d'où : $\qquad \dfrac{\overline{F'_2A_2}}{\overline{F_1A_1}} = -\dfrac{f'_2}{f'_1}\,\dfrac{f_2}{f_1} = \left(\dfrac{f'_2}{f'_1}\right)^2 = \gamma^2$

Un tel système est utilisé pour l'observation d'objets éloignés.

Exercices et problèmes

EP.8.1. : Distances focales de lentilles minces

Déterminer les distances focales et les natures (convergente ou divergente) des lentilles minces a, b, c, d, e représentées sur la figure.

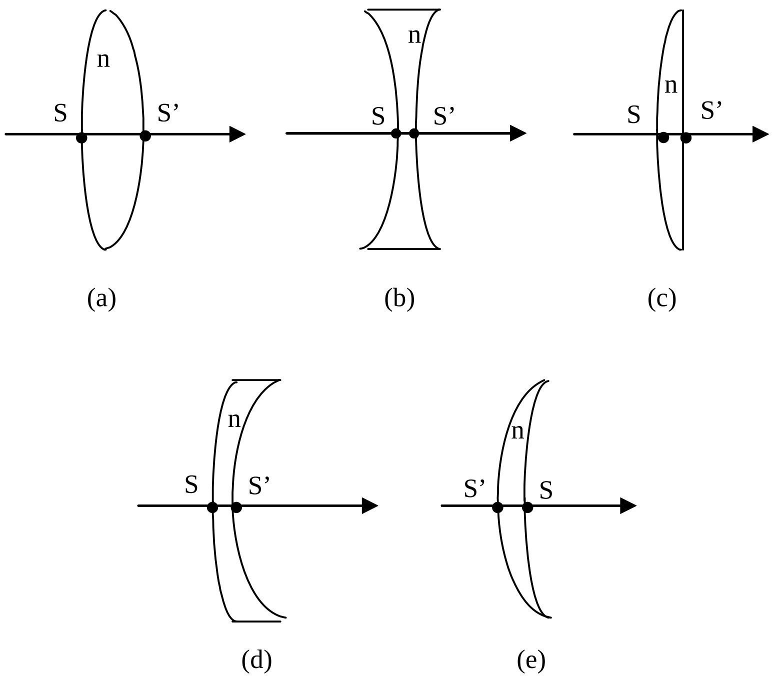
Ces lentilles sont taillées dans du verre d'indice n et sont formées par deux dioptres sphériques de sommets respectifs S et S'.

On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss et on donne :

n = 1,5 : indice de la lentille

$R = \left| \overline{SC} \right| = 50$ cm : rayon du dioptre sphérique de sommet S

$R' = \left| \overline{S'C'} \right| = 30$ cm : rayon du dioptre sphérique de sommet S'



Solution

Les lentilles sont minces donc les sommets S et S' sont supposés être confondus avec le centre optique O de la lentille.

a. Il s'agit d'une lentille mince biconvexe. La position du foyer image F' de la lentille est donnée par la relation suivante :

$$\frac{1}{\overline{OF'}} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{S'C'}}\right)$$

On trouve : $\overline{OF'}$ = 0,375 m. Le foyer image est réel, la lentille est donc convergente.

b. Il s'agit d'une lentille mince biconcave. Dans ce cas, on trouve $\overline{OF'}$ = – 0,375 m. Le foyer image est virtuel, la lentille est donc divergente.

c. Il s'agit d'une lentille convexe plan et on a $\frac{1}{\overline{OF'}} = (n-1)\frac{1}{\overline{SC}}$.

On trouve $\overline{OF'}$ = 1 m. Le foyer image est réel, la lentille est donc convergente.

d . Il s'agit d'un ménisque à bords épais. On trouve $\overline{OF'}$ = – 1,5 m. La lentille est dans ce cas divergente.

e. Il s'agit d'un ménisque à bords minces. On trouve $\overline{OF'}$ = 1,5 m. La lentille est dans ce cas convergente.

EP.8.2. : Association d'une lentille et d'un miroir plan

Soit une lentille convergente L de foyers F et F' et de centre optique O et $\overrightarrow{AB}$ un petit objet perpendiculaire à l'axe optique tel que :

OA >OF.

1. Construire l'image $\overrightarrow{A'B'}$ de l'objet $\overrightarrow{AB}$ à travers L

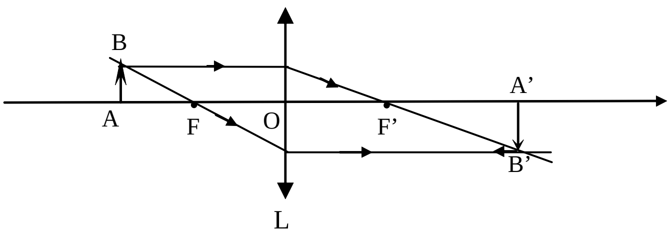
2. On place derrière la lentille un miroir plan M perpendiculaire à l'axe optique. Soit O' l'intersection de M et de l'axe optique.

Déterminer graphiquement la position et la nature de l'image $\overrightarrow{A''B''}$ de $\overrightarrow{AB}$ à travers le système optique formé par la lentille et le miroir quand

$$\left|\overline{OO'}\right| > \left|\overline{OA}\right|.$$

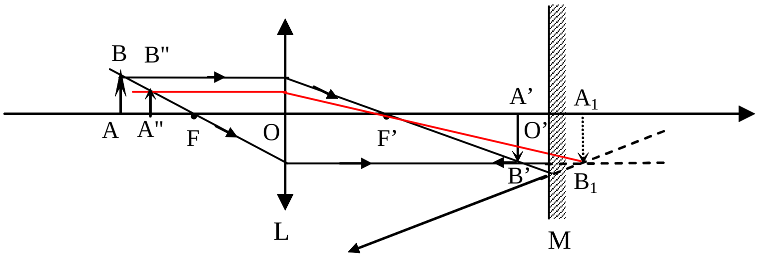
Solution

1. Image $\overrightarrow{A'B'}$ de l'objet $\overrightarrow{AB}$ à travers L



L'image $\overrightarrow{A'B'}$ est réelle.

2. Image $\overrightarrow{A''B''}$ de $\overrightarrow{AB}$ à travers le système optique (L,M)



Le miroir M donne de $\overrightarrow{A'B'}$ une image $\overrightarrow{A_1B_1}$ symétrique de $\overrightarrow{A'B'}$ par rapport à M. Cette image est virtuelle puisque l'objet est réel..

$\overrightarrow{A_1B_1}$ est un objet réel pour la lentille L (le sens de la lumière est inversé), son image $\overrightarrow{A''B''}$ est réelle.

EP.8.3. : Principe de la méthode de Bessel

Un objet $\overrightarrow{A_1B_1}$ et un écran E, fixes, sont distants de $\overline{A_1E}$ = D = 180 cm.

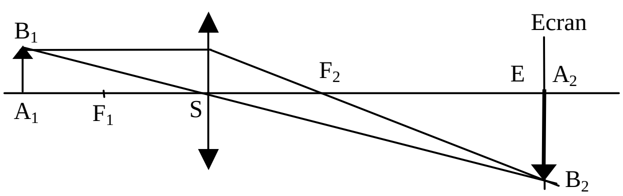
On déplace entre eux une lentille convergente L de distance focale f ' = 40 cm

Déterminer :

1- les positions de la lentille qui donnent, sur l'écran, une image nette de l'objet.

2- le grandissement linéaire transversal pour chacune des positions

Solution



Posons : $\overline{SA_1} = x$ soit : $\overline{SA_2} = \overline{SA_1} + \overline{A_1A_2} = D + x$

Appliquons la relation de conjugaison avec origine au sommet S

$$\frac{1}{\overline{SA_2}} - \frac{1}{\overline{SA_1}} = \frac{1}{\overline{SF_2}}$$

On a : $$\frac{1}{D+x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

D'où l'équation : $x^2 + Dx + Df' = 0$ dont les racines sont :

$$x_1 = (\overline{SA_1})_1 = \frac{-D+\sqrt{D^2-4Df'}}{2} = -60 \text{ cm}$$

$$x_2 = (\overline{SA_1})_2 = \frac{-D-\sqrt{D^2-4Df'}}{2} = -120 \text{ cm}$$

qui correspondent à : $(\overline{SA_2})_1 = 120$ cm et $(\overline{SA_2})_2 = 60$ cm

Les grandissements linéaires transversaux dans les deux cas sont :

$$\gamma_1 = \frac{(\overline{SA_2})_1}{(\overline{SA_1})_1} = \frac{120}{-60} = -2$$

$$\gamma_2 = \frac{(\overline{SA_2})_2}{(\overline{SA_1})_2} = \frac{60}{-120} = -\frac{1}{2}$$

Remarques :

- Les deux positions se déduisent l'une de l'autre par le principe du retour inverse de la lumière. La première position étant trouvée, si on inverse le sens de propagation, permutant ainsi l'objet et l'image, on est dans la seconde position.

- Le problème est possible et admet deux solutions si D > 4f '. La distance d des deux positions de la lentille est donnée par la différence des racines et a pour expression

$$d = \sqrt{D^2-4Df'}$$

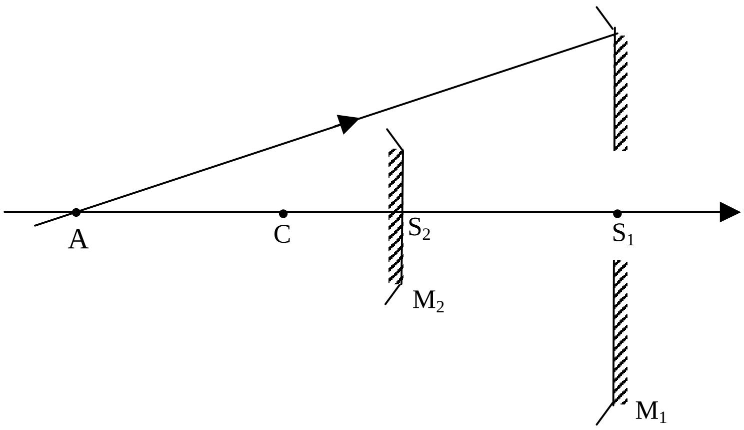
soit $$f' = \frac{D^2-d^2}{4D}$$

C'est la méthode de Bessel pour la mesure de la distance focale d'une lentille convergente.

EP.8.4. : Equivalence d'un système de deux miroirs et d'une lentille mince

On considère deux miroirs sphériques M_1 et M_2 de même centre C tels que M_1 est convexe de rayon $\overline{CS_1} = 3R$ et M_2 est concave de rayon $\overline{CS_2} = R$.

Une ouverture percée dans M_1, centrée sur l'axe principal commun des deux miroirs, permet à la lumière de se propager à droite de M_2. On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.



1. Déterminer la position de l'image A' d'un objet A donnée par le système optique constitué par l'ensemble des deux miroirs M_1 et M_2. En déduire la relation de conjugaison en fonction de $\overline{CA}$ et $\overline{CA'}$.

2. Déterminer le grandissement linéaire transversal correspondant.

3. Montrer que ce système est équivalent à une lentille mince dont on précisera le centre et la distance focale. Préciser la nature de cette lentille.

Solution

1. Image A' de A :

$$A \xrightarrow{M_1} A_1 \xrightarrow{M_2} A'$$

$$A \xrightarrow{M_1} A_1 : \frac{1}{\overline{CA_1}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS_1}}$$

$$A_1 \xrightarrow{M_2} A' : \frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA_1}} = \frac{2}{\overline{CS_2}}$$

d'où
$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{2}{\overline{CS_1}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS_2}}$$

$$\frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS_2}} - \frac{2}{\overline{CS_1}}$$

$$\frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = 2\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{3R}\right] = \frac{4}{3R} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{4}{3R} \quad \Rightarrow \quad \overline{CA'} = \frac{3R\,\overline{CA}}{3R + 4\overline{CA}}$$

2. Grandissement linéaire transversal :

On a $\gamma_1 = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CA_1}}{\overline{CA}}$

$\gamma_2 = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA_1}}$

soit $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_2\gamma_1 = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \dfrac{3R}{3R + 4\overline{CA}}$

3- Equivalence avec une lentille

La relation (1) est identique à la relation de conjugaison d'une lentille mince de centre optique C et de distance focale

$$f' = \overline{CF'} = \frac{3}{4}R > 0$$

Cette lentille est donc convergente.

EP.8.5. : Lentille plongée dans un milieu

On considère une lentille mince biconvexe d'axe optique Δ, de centre optique S, d'indice n, formée de deux dioptres sphériques de rayons de courbure respectifs R_1 et R_2 .

1. La lentille est plongée dans l'air d'indice n = 1:

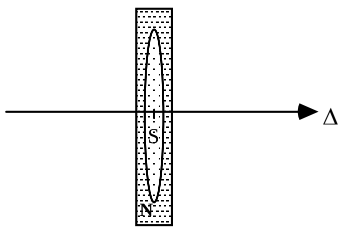
1.a.- Etablir la relation entre les positions d'un objet A_1 et de son image A_2 donnée par cette lentille en prenant le centre optique S comme origine.

1.b.- En déduire la relation donnant la distance focale $\overline{SF_2}$ de la lentille.

2. La lentille est plongée dans l'eau d'indice N = $\dfrac{4}{3}$:

Etablir la relation donnant la nouvelle distance focale $\overline{SF'_2}$ de la lentille placée dans l'eau.

3. La lentille est placée dans une cuve d'eau à faces parallèles de faible épaisseur:



3.a.- Soit un point objet placé à l'infini dans la direction de l'axe Δ du système optique mince (lentille-cuve d'eau). Construire l'image de cet objet à travers le système optique mince tel que représenté sur la figure.

3.b.- Sachant que :

- la distance focale de la lentille dans l'air est $\overline{SF_2}$ = 15 cm

- la distance focale du système optique (lentille-cuve d'eau) est $\overline{SF'}$ = 39 cm, déterminer l'indice n de la lentille.

Solution

1. Lentille dans l'air :

1.a. Relation entre A_1 et A_2 :

Le 1er dioptre sphérique (S_1 , C_1, n_1 = 1, n_2 = n) donne de A_1 une image A' :

$A_1 \rightarrow A'$ soit $$\frac{1}{\overline{S_1A_1}} - \frac{n}{\overline{S_1A'}} = \frac{1-n}{\overline{S_1C_1}}$$

Le 2ème dioptre sphérique (S_2 , C_2, n_1 = n, n_2 = 1) donne de A' une image A_2:

$A' \rightarrow A_2$ soit $$\frac{n}{\overline{S_2A'}} - \frac{1}{\overline{S_2A_2}} = \frac{n-1}{\overline{S_2C_2}}$$

La lentille mince (R_1 , R_2, $S_1 = S_2 = S$) donne de A_1 l'image A_2:

$A_1 \rightarrow A_2$ SOIT $$\frac{1}{\overline{SA_1}} - \frac{1}{\overline{SA_2}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

1.b. Distance focale $\overline{SF_2}$:

On a $A_1 \rightarrow \infty$ ce qui entraîne : $$\frac{1}{\overline{SF_2}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

2. Lentille dans l'eau :

Le 1er dioptre sphérique (S_1 , C_1, n_1 = N, n_2 = n) donne:

$A_1 \rightarrow A'$ soit $$\frac{N}{\overline{S_1A_1}} - \frac{n}{\overline{S_1A'}} = \frac{N-n}{\overline{S_1C_1}}$$

Le 2ème dioptre sphérique (S_2 , C_2, n_1 = n, n_2 = N) donne :

$A' \rightarrow A_2$ soit $$\frac{n}{\overline{S_2A'}} - \frac{N}{\overline{S_2A_2}} = \frac{n-N}{\overline{S_2C_2}}$$

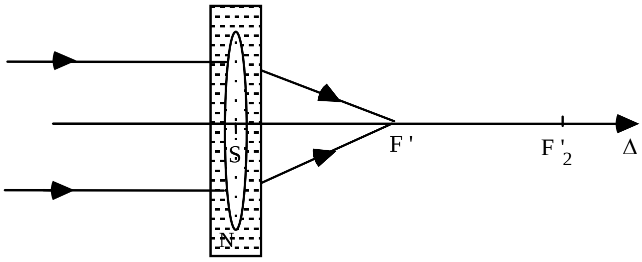
La lentille mince (R_1 , R_2, $S_1 = S_2 = S$)donne :

$A_1 \rightarrow A_2$ soit $$\frac{1}{\overline{SA_1}} - \frac{1}{\overline{SA_2}} = \frac{(n-N)}{N}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

La distance focale $\overline{SF'_2}$ est telle que:

$A_1 \rightarrow \infty$ soit $$\frac{1}{\overline{SF'_2}} = \frac{(n-N)}{N}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

3. Système (lentille-cuve d'eau) :
3.a. Construction



3.b. Indice n de la lentille :

dioptre plan (eau-air) → $\frac{N}{\overline{SF'_2}} = \frac{1}{\overline{SF'}}$

soit : $\overline{SF'} = \frac{\overline{SF'_2}}{N}$ avec $\overline{SF'_2} = N \frac{n-1}{n-N} \overline{SF_2}$

d'où $\overline{SF'} = \frac{n-1}{n-N} \overline{SF_2}$ ⇒ n = 1,54

EP.8.6. : Association de deux lentilles 1

On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.

On considère une lentille mince convergente L_1, de centre optique O_1, d'axe optique Δ et de foyers F_1 et F'_1 et un objet ponctuel A placé à l'infini dans la direction de Δ.

1. Tracer la marche de deux rayons issus de A traversant la lentille.
Quelle est la position de l'image A_1 du point A donnée par L_1 ?

2. On ajoute, sur le chemin des rayons émergents de L_1, une lentille mince convergente L_2, de centre optique O_2, de même axe optique Δ que L_1 et de foyers F_2 et F'_2 .

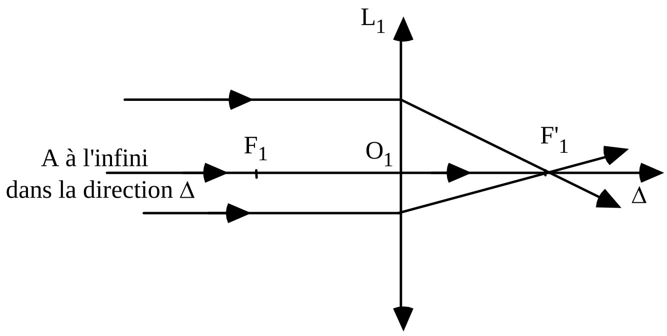
Déterminer graphiquement la position de l'image A_2 du point A à travers le système formé par les deux lentilles minces L_1 et L_2

2.a.- quand : $\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2}$

2.b.- quand : $\overline{O_1O_2} > \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2}$

Solution

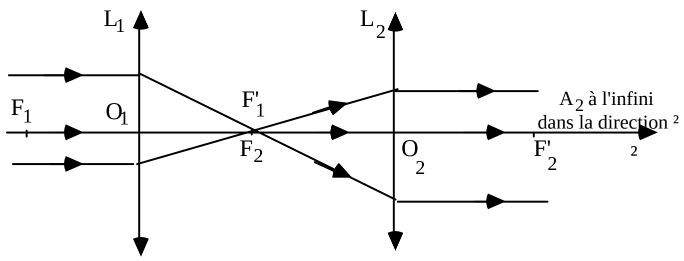
1. Marche de deux rayons :



L'objet A étant à l'infini dans la direction de l'axe, son image A_1 donnée par la lentille L_1 se trouve au foyer image F'_1 de L_1.

2. Position de l'image A_2 de A donnée par le système formé par les deux lentilles:

2.a. : $\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2}$

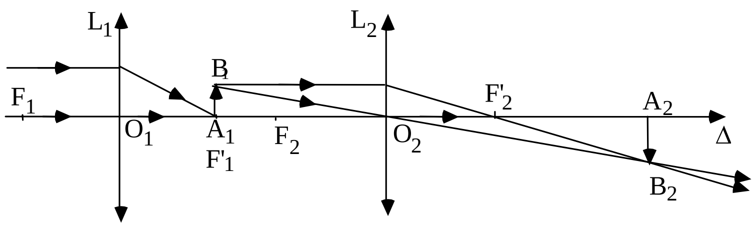


2.b. : $\overline{O_1O_2} > \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2}$

Pour construire l'image A_1 de A à travers le système des deux lentilles, il suffit de construire, à travers la lentille L_2, l'image A_2 de A_1 placée en F'_1 .

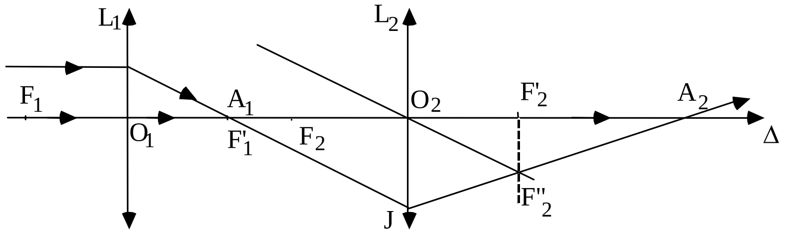
<u>1ère méthode :</u>

On place en F'_1, perpendiculairement à l'axe Δ, un petit objet $\overline{A_1B_1}$ dont on construit l'image $\overline{A_2B_2}$ à travers L_2 :



<u>2ème méthode</u> :

Le rayon passant par O_2 et parallèle à A_1J coupe le plan focal image de L_2 en F''_2 (foyer secondaire). Le rayon A_1J émerge de L_2 en passant par F''_2 et coupe l'axe en A_2 .



EP.8.7. : Association de deux lentilles 2

On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss et on se place dans l'air d'indice n = 1

1. Un petit objet rectiligne $\overline{A_1B_1}$ est placé perpendiculairement à l'axe Δ à une distance de 90 cm d'une lentille mince convergente L_1, de centre optique S_1, de distance focale $\overline{S_1F'_1} = f' = 30$ cm et d'axe Δ (voir figure)

1.a. Construire graphiquement l'image $\overline{A'_1B'_1}$ de $\overline{A_1B_1}$ donnée par la lentille L_1.

1.b. Préciser la nature de cette image.

1.c. Déterminer la position du point A'_1 par rapport à S_1.

2. Une deuxième lentille L_2, de centre optique S_2, de même distance focale $f' = \overline{S_2F'_2}$ et de même axe Δ que L_1, est placée à 30 cm à droite de L_1.

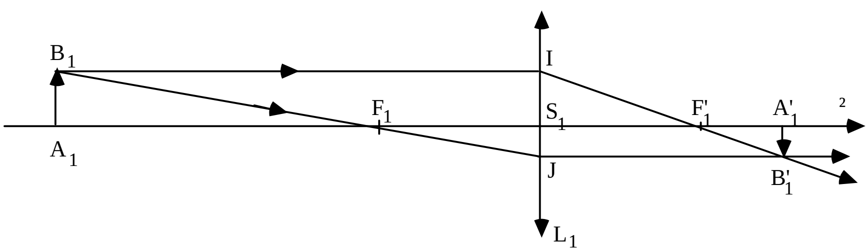
2.a. Construire graphiquement l'image finale $\overline{A_2B_2}$ donnée par l'ensemble des deux lentilles.

2.b. Préciser la nature de cette image.

2.c. Déterminer la position du point A_2 par rapport à S_2.

Solution

1.a. Construction de l'image $\overline{A'_1B'_1}$ de $\overline{A_1B_1}$ donnée par la lentille L_1 :



1.b. Nature de l'image : Image réelle renversée

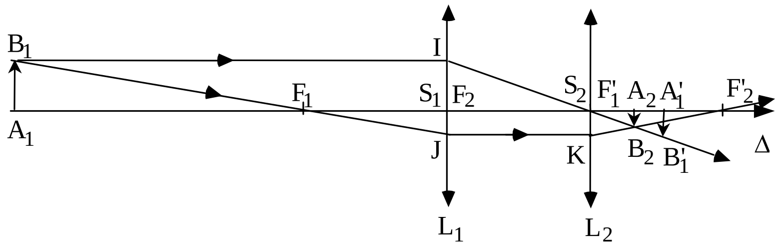
1.c. Position du point A'_1 par rapport à S_1 :

$$\frac{1}{\overline{S_1A'_1}} - \frac{1}{\overline{S_1A_1}} = \frac{1}{\overline{S_1F'_1}} = \frac{1}{f'}$$

avec : $\overline{S_1A_1} = -3\,f'$ et $\overline{S_1F'_1} = f'$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\overline{S_1A'_1}} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{3f'} = \frac{2}{3f'} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_1A'_1} = \frac{3}{2} f' = 45 \text{ cm}$$

2.a. Construction de l'image finale $\overline{A_2B_2}$ donnée par l'ensemble des deux lentilles :



2.b. Nature de l'image : Image réelle renversée

2.c. Position du point A_2 par rapport à S_2.

$$\frac{1}{\overline{S_2A_2}} - \frac{1}{\overline{S_2A'_1}} = \frac{1}{\overline{S_2F'_2}} = \frac{1}{f'}$$

avec : $\overline{S_2A'_1} = \frac{1}{2} f'$ et $\overline{S_2F'_2} = f'$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\overline{S_2A_2}} = \frac{1}{f'} + \frac{2}{f'} = \frac{3}{f'} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_2A_2} = \frac{1}{3} f' = 10 \text{ cm}$$

EP.8.8. : Lentille concave semi argentée

Une lentille bi-concave, de centre O, taillée dans un verre d'indice n=1,5, a une face argentée (voir figure). Les deux faces ont le même rayon de courbure R = 10 cm.

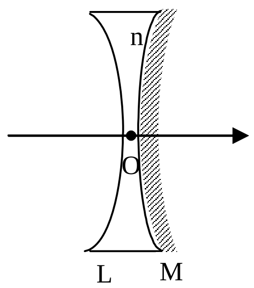
On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.

1. Trouver la distance focale $\overline{OF'}$ de la lentille.

2. Chercher l'image d'un objet placé en O

3. Trouver l'image d'un objet placé en un point de l'axe à égale distance du foyer objet de la lentille et du centre O.

4. Cette lentille semi argentée est équivalente à un miroir sphérique M', donner ses caractéristiques(son sommet S' et son centre C').



Solution

1. On a : $\frac{1}{\overline{OF'}} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{OC}} - \frac{1}{\overline{OC'}}\right)$ et par suite : $\overline{OF'} = 0{,}1$ m.

2.– $O \xrightarrow{L} O \xrightarrow{M} O \xrightarrow{L} O.$

En effet, O étant le centre optique de la lentille L, il est sa propre image par la lentille L. De même, O est confondu avec le sommet S du miroir sphérique (puisque la lentille est mince) qui est sa propre image par le miroir.

3. Soit A tel que $\overline{OA} = \frac{\overline{OF}}{2} = 0{,}05$ m.

L'image A' de A par la lentille vérifie

$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$ et on trouve : $\overline{OA'} = \overline{OF}$.

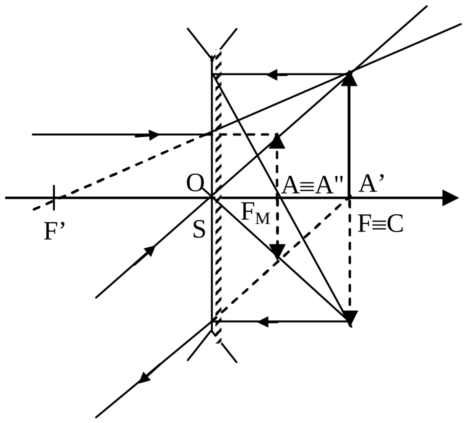
A' est donc confondu avec le centre C du miroir sphérique. Il est donc sa propre image par le miroir. D'après le principe du retour inverse de la lumière, l'image C par L est le point A.

$A \xrightarrow{L} A'=C \xrightarrow{M} C \xrightarrow{L} A''=A.$

Ainsi, A est sa propre image par ce système optique. Mais elle correspond à un grandissement égal à –1.

$\gamma_L = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 2$, $\gamma_M = -1$ (c'est une caractéristique du centre du miroir) et

$\gamma_L = \frac{\overline{OA''}}{\overline{OC}} = \frac{1}{2}$. D'où $\gamma = -1$

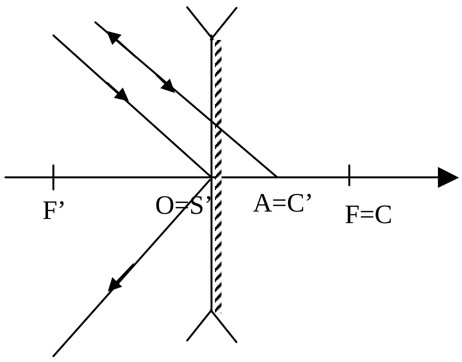


4. Si ce système est équivalent à un miroir sphérique M'_S, il a les propriétés suivantes :

$$A \xrightarrow{M'_S} A$$ et tel que l'image d'un point dans le plan contenant A est renversée et de même taille γ = -1

et $$O \xrightarrow{M'_S} O.$$

Ainsi, le sommet S' du miroir équivalent M'_S est le point O et le centre du miroir équivalent est le point A qui est le milieu du segment OF. En effet, on vérifie bien qu'un rayon passant par O ≡ S' est réfléchi symétriquement par rapport à lui-même et qu'un rayon passant par A ≡ C' se réfléchit sur lui-même.

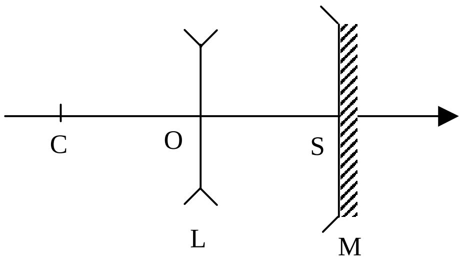


EP.8.9. : Association d'une lentille et d'un miroir sphérique

Soit un système optique (S) formé par l'association d'une lentille mince divergente L de distance focale égale à 50 cm et d'un miroir sphérique concave M de même distance focale disposés de sorte que le centre optique O de la lentille L coïncide avec le foyer du miroir M.

On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.

Soit $\overrightarrow{AB}$ un objet de petite taille .



1 – Déterminer le grandissement transversal linéaire du système optique considéré. En déduire que ce système optique est équivalent à un miroir M' dont on précisera la forme.

2 – Donner l'image de $\overrightarrow{AB}$ donnée par le système (S) sachant que A est confondu avec C. En déduire la position du miroir M'.

Solution

1. $A \xrightarrow{L} A' \xrightarrow{M} A'' \xrightarrow{L} A'''$. Il faut bien noter que A''' est l'image de A'' à travers la lentille dans la situation où la lumière a changé de sens. Les foyers objet et image sont donc inversés.

Le grandissement linéaire transversal γ est donc le produit de trois grandissements γ_L, γ_M et γ'_L avec

$\gamma_L = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CO}}$ où le foyer image F' de la lentille est confondu avec le centre C du miroir

$$\gamma_M = \frac{\overline{OA''}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{CA''}}{\overline{CA'}}$$

$\gamma'_L = \dfrac{\overline{OA'''}}{\overline{OA''}} = \dfrac{\overline{CO}}{\overline{CA''}}$ Dans ce cas, c'est le foyer objet qui est confondu avec le centre C.

On trouve donc : $\gamma = \dfrac{\overline{OA'''}}{\overline{OA}} = \gamma_L \cdot \gamma_M \cdot \gamma'_L = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CO}} \cdot \dfrac{\overline{CA''}}{\overline{CA'}} \cdot \dfrac{\overline{CO}}{\overline{CA''}} = 1.$

On trouve donc que le grandissement linéaire transversal est toujours égal à 1 quelle que soit la position de l'objet.

Sachant que l'espace objet et image sont confondus, ce système optique est donc équivalent à un miroir plan.

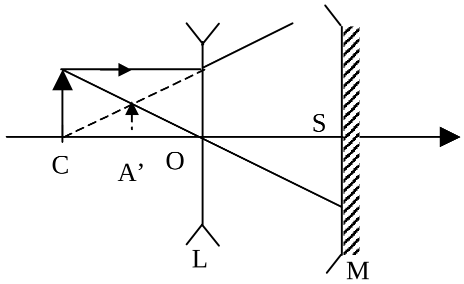
2 – Cherchons l'image de C par le système (S).

On a : $C \xrightarrow{L} A' \xrightarrow{M} A'' \xrightarrow{L} A'''$.

La lentille étant divergente, le foyer image F' = C et l'on a

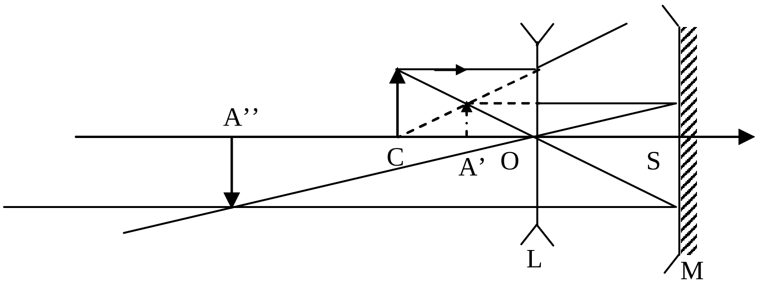
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OC}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OC}} \;.$$

d'où $\overline{OA'} = -0{,}25$ m. Cette image est virtuelle comme le montre la construction ci-dessous.



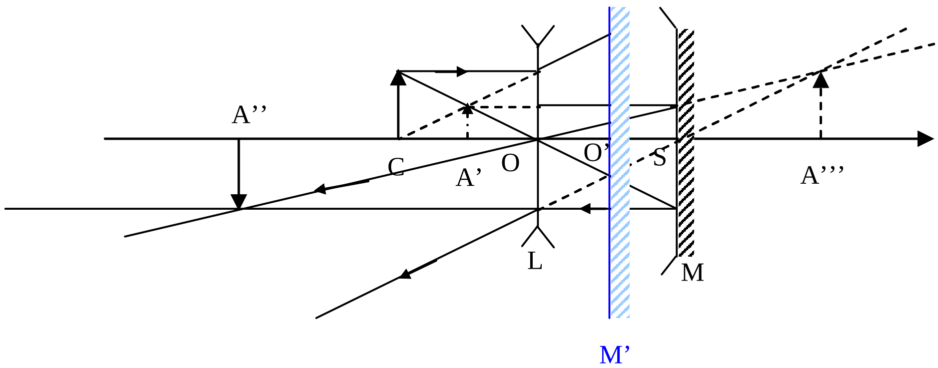
L'image de A' par le miroir vérifie la formule de conjugaison suivante :

$$\frac{1}{\overline{SA''}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$ et on trouve $\overline{SA''} = -1{,}5$ m . D'où $\overline{OA''} = -1$ m.



A''' est l'image A'' par la lentille L sachant que la lumière a le sens inverse. Le point C devient le foyer objet de la lentille et S son foyer image. D'où :

$$\frac{1}{\overline{OA'''}} - \frac{1}{\overline{OA''}} = \frac{1}{\overline{OS}}$$ et l'on trouve $\overline{OA'''} = 1$ m. L'image est virtuelle.



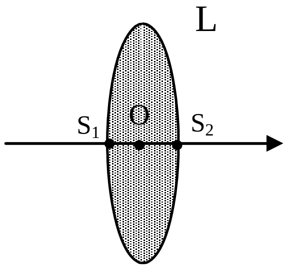
La distance entre l'objet C et son image par le système (S) est égale à $\overline{CA'''}$ =1,5 m. Le milieu O' du segment [CA'''] est donc l'intersection du miroir plan équivalent au système (S) avec l'axe optique et on trouve :

$$\overline{OO'} = \overline{OC} + \frac{1}{2}\overline{CA'''} = 0,25 \text{ m.}$$

EP.8.10. : Lentille achromatique

On se propose d'étudier les lentilles utilisées comme objectifs des lunettes astronomiques.

On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss et on considère une lentille mince L taillée dans du verre d'indice de réfraction n, placée dans l'air, constituée par deux dioptres sphériques D_1 et D_2 de sommets S_1 et S_2 , de centres C_1 et C_2 et de rayons $R_1 = \overline{S_1C_1}$ et $R_2 = \left|\overline{S_2C_2}\right|$, respectivement. On donne : $R_1 = R_2 = 2$ m.



1.a. Etablir la formule de conjugaison pour la lentille L, en considérant qu'elle est formée par l'association de deux dioptres sphériques et en supposant que les sommets S_1 et S_2 sont confondus avec le centre optique O de L (lentille mince).

1.b. En déduire la relation suivante :

$$\frac{1}{\overline{OF'}} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{OC_1}} - \frac{1}{\overline{OC_2}}\right)$$

où F' est le foyer image de la lentille L.

1.c. En déduire la nature de la lentille (convergente ou divergente).

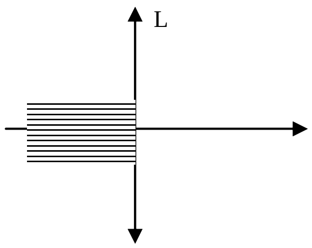
2. La lentille est taillée dans du verre dont l'indice de réfraction dépend de la longueur d'onde. Le tableau suivant donne l'indice correspondant à trois longueurs d'ondes différentes :

Couleur bleue	Couleur oranger	Couleur rouge
λ_B= 0,486 μm	λ_O= 0,589 μm	λ_R= 0,656 μm
n_B= 1,585	n_O= 1,575	n_R= 1,571

2.a. Calculer les distances focales f '$_B$, f '$_O$ et f '$_R$ de la lentille L correspondant à chaque longueur d'onde.

2.b. On place un écran dans le plan focal image correspondant à la couleur oranger de longueur d'onde λ_O.

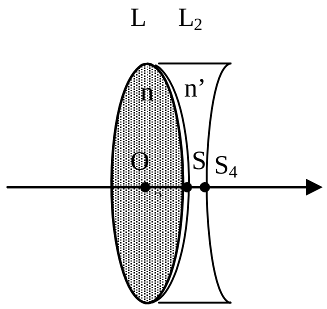
On éclaire la lentille par un faisceau cylindrique parallèle à l'axe optique monochromatique de longueur d'onde λ_O . Qu'observe-t-on sur l'écran ?



On remplace le faisceau de longueur d'onde λ_O par un faisceau de longueur d'onde λ_B puis par un faisceau de longueur d'onde λ_R . Qu'observe-t-on dans chaque cas ?

Commenter le résultat.

3. Pour corriger ce défaut de la lentille L, on accole une seconde lentille L_2 taillée dans un verre différent du premier, de foyers objet F_2 et image F'$_2$, d'indice de réfraction n' tel que n'$_B$= 1,664 et n'$_R$= 1,644.



3.a. En supposant que <u>les centres des deux lentilles L et L_2 sont confondus</u>, montrer que le foyer image F'$_S$ du système constitué par { L , L_2 } est donné par la relation :

$$\frac{1}{\overline{OF'_S}} = \frac{1}{\overline{OF'}} + \frac{1}{\overline{OF'_2}}$$

3.b. La lentille L_2 est constituée par deux dioptres sphériques D_3 et D_4 de sommets S_3 et S_4, de centres C_3 et C_4 et de rayons $R_3 = \left|\overline{S_3C_3}\right|$ et $R_4 = \overline{S_4C_4}$, respectivement.

Quelle est la nature de la lentille L_2 ?

3.c. Sachant que R_3=R_1, déterminer le rayon de courbure R_4 pour que les foyers images du système { L , L_2 } soient identiques pour les deux longueurs d'onde λ_B et λ_R .

Solution

1. Soit A un objet. On considère $D_1(1,n)$ le premier dioptre de sommet S_1 et de centre C_1 et $D_2(n,1)$ le second dioptre de sommet S_2 et de centre C_2 .

$A \xrightarrow{D_1} A_1 \xrightarrow{D_2} A'$ et l'on a

$$\frac{1}{\overline{S_1A}} - \frac{n}{\overline{S_1A_1}} = \frac{1-n}{\overline{S_1C_1}} \quad \text{et} \quad \frac{n}{\overline{S_2A_1}} - \frac{1}{\overline{S_2A'}} = \frac{n-1}{\overline{S_2C_2}}$$

La lentille est mince $S_1 = S_2 = O$, la formule de conjugaison devient :

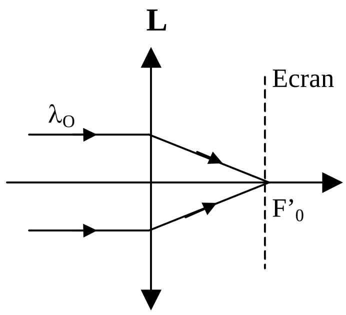
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{0C_1}} - \frac{1}{\overline{0C_2}}\right) = \frac{1}{\overline{0F'}}$$

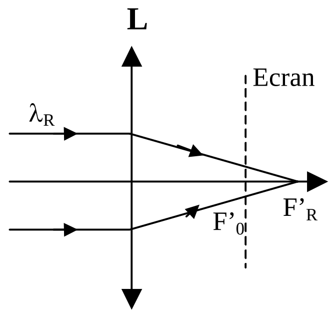
où F' est le foyer image de la lentille. $\overline{0C_1} > 0$ et $\overline{0C_2} < 0$ donc $\overline{OF'} > 0$. Le foyer image est réel et la lentille est par conséquent convergente.

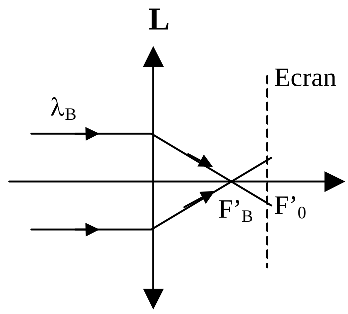
2. a

Couleur bleue	**Couleur oranger**	**Couleur rouge**
n_B= 1,585	n_O= 1,575	n_R= 1,571
f'_B= 1.70 m	f'_0= 1.74 m	f'_R= 1.75 m

2.b







L'écran est placé dans le plan focal image correspondant à la couleur oranger de longueur d'onde λ_O. Quand on éclaire la lentille par un faisceau cylindrique de longueur d'onde λ_O , on observe un point sur l'écran puisque tous les rayons convergent vers le foyer image F'_O. En revanche, lorsqu'on éclaire la lentille par un faisceau lumineux de longueur d'onde λ_B ou λ_R, on observe une tache circulaire sur l'écran.

Un faisceau polychromatique aura donc un défaut de stigmatisme même dans les conditions de Gauss à cause de la dépendance de l'indice n en fonction de la longueur d'onde du rayon. Le lentille a donc un défaut d'achromatisme. Ceci la rend impropre à une utilisation comme objectif d'une lunette astronomique.

3. a. $A \xrightarrow{L} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2$ et l'on a

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{OA_2}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'_2}} .$$

D'où $$\frac{1}{\overline{OA_2}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'_2}} + \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{OF'_2}} + \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OF'_S}}$$

F'_S est le foyer image de la lentille équivalente du système constitué par $\{L,L_2\}$.

3.b. $$\frac{1}{\overline{0F'_2}} = (n'-1)\left(\frac{1}{\overline{0C_3}} - \frac{1}{\overline{0C_4}}\right) < 0$$ donc la lentille L_2 est divergente.

3.c. $$\frac{1}{\overline{OF'_{SR}}} = \frac{1}{\overline{OF'_{SB}}} \iff \frac{1}{\overline{OF'_R}} + \frac{1}{\overline{OF'_{2R}}} = \frac{1}{\overline{OF'_B}} + \frac{1}{\overline{OF'_{2B}}} .$$

Sachant que $R_1 = R_2 = R_3$, la relation précédente devient

$$(n_R - 1)\left(\frac{2}{R_1}\right) + (n'_R - 1)\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_4}\right) = (n_B - 1)\left(\frac{2}{R_1}\right) + (n'_B - 1)\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_4}\right)$$

et on trouve : $$R_4 = \frac{R_1(n'_R - n'_B)}{2n_R + n'_B - 2n_B - n'_R} = 2{,}5\text{m}$$

CHAPITRE 9

LES INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Il n’est guère de science ou de technique qui ne fasse appel aux méthodes optiques pour des observations, des mesures, des reproductions ou des transmissions de données.

Les progrès réalisés dans la confection des instruments d’optique sont en constante évolution et puisent leurs performances aussi bien dans l’avancement des aspects fondamentaux de l’optique que dans le développement technologique : les domaines d’application et de prospection sont riches et variés, ils couvrent à la fois les problèmes de la vie courante (lunetterie ; éclairagisme, photographie, cinéma) que des problèmes de recherche pointue tels que l’imagerie, l’astrophysique, la spectroscopie, la transmission…

Nous allons présenter dans ce chapitre quelques instruments particuliers. On commencera naturellement par l’œil, système complexe et merveilleux sans lequel l’optique n’aurait pas vu le jour et dont les propriétés conditionnent la finalité de beaucoup d’autres instruments.

Nous traiterons ensuite la loupe qui est l’instrument le plus simple qui soit puisqu’il est constitué uniquement d’une lentille convergente d’une distance focale de quelques centimètres.

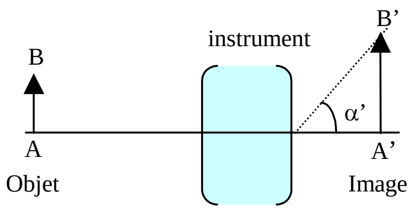
On étudiera enfin quelques instruments plus complexes utilisés pour observer l’infiniment petit et l’infiniment grand : on commencera par le microscope optique dont les éléments essentiels, oculaires et objectifs, sont des constituants présents dans tous les autres instruments visuels et on abordera l’étude de la lunette astronomique, de la lunette de Galilée et du télescope qui sont des instruments d’observation d’objets éloignés comme les astres. Dans ce cas, les objets ont le plus souvent de très grandes dimensions mais leur distance considérable a pour conséquence qu’il sont vus, à l’œil nu, sous un très faible diamètre angulaire et les instruments utilisés augmentent ce diamètre apparent.

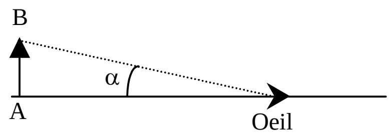
1. Grandeurs caractéristiques des instruments d'optique

1.1. Grossissement

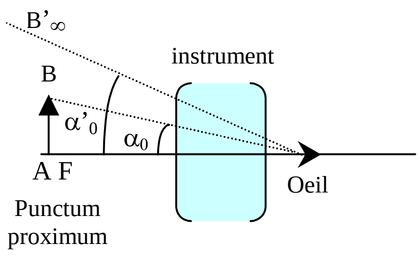
Le grossissement g d'un instrument d'optique est défini par le rapport du diamètre angulaire α' sous lequel est vue l'image $\overrightarrow{A'B'}$ d'un objet donnée par un instrument d'optique à celui α sous lequel l'objet $\overrightarrow{AB}$ est vu à l'œil nu :

$$g = \frac{\alpha'}{\alpha}$$





Le grossissement commercial est la valeur particulière g_0 de g pour laquelle α_0 est le diamètre angulaire d'un objet placé au punctum proximum de l'œil de l'observateur (voir définition donnée au paragraphe suivant) et α'_0 le diamètre angulaire de l'image donnée par un instrument dont le foyer objet F est également placé au punctum proximum. Cette image est donc à l'infini.



1.2. Puissance

La puissance P d'un instrument d'optique est définie part le rapport du diamètre apparent α' de l'image à la taille AB de l'objet :

$$P = \frac{\alpha'}{AB}$$

La puissance s'exprime en dioptries, AB en mètres et α' en radians.

On définit la puissance intrinsèque d'un instrument en se plaçant dans les conditions où l'on observe l'image à travers l'instrument sans fatiguer l'œil. L'image doit être à l'infini et donc l'objet dans le plan focal objet de l'instrument.

1.3. Pouvoir de résolution ou pouvoir séparateur

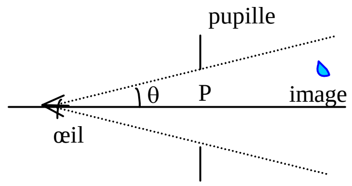
Le pouvoir de résolution ou pouvoir séparateur d'un instrument représente la plus petite distance entre deux points que l'instrument permet de distinguer l'un de l'autre.

Si "d" est la distance minimale distinguée de deux objets et "a" la distance de ces objets, le pouvoir de résolution est défini par :

$$\varepsilon = \frac{a}{d}$$

1.4. Champ

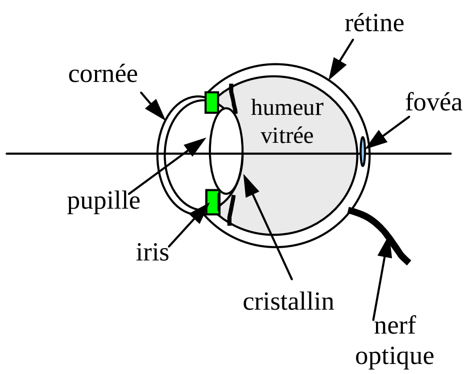
Le champ est défini par l'angle maximal sous lequel on peut voir l'image à travers l'instrument d'optique. Il est limité par la pupille de sortie de l'instrument. Si r est le diamètre de cette pupille et OP la distance œil-pupille, on a : $\operatorname{tg}\theta = \frac{r}{OP}$



2. Notions sur l'œil

Il ne s'agit pas une étude approfondie de l'œil mais de présenter les principales caractéristiques de cet organe.

2.1. Schéma de l'œil



La cornée joue le rôle d'un dioptre sphérique,

L'iris diaphragme le faisceau en limitant l'intensité lumineuse pénétrant dans l'œil . Il est coloré et sa teinte constitue la couleur des yeux,

La pupille représente l'ouverture de l'iris,

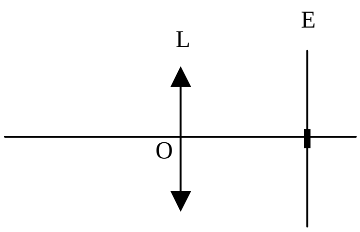
Le cristallin agit comme une lentille convergente de distance focale variable,

La rétine joue le rôle d'un plan d'observation,

La fovéa, ou tache jaune, est la partie de la rétine capable d'analyser l'image de manière la plus fine,

Le nerf optique transmet les informations au cerveau qui les interprète.

L'œil peut donc être schématisé par une lentille mince convergente L, de centre optique O et de distance focale variable et un écran de projection E.



2.2. Caractéristiques de l'œil

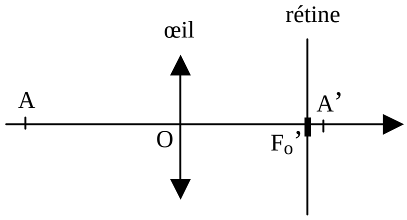
2.2.1. Champ angulaire

Seuls sont vus nettement les points de l'espace dont l'image se forme sur la fovéa. Si l'œil est immobile et la tête fixe, le champ angulaire de l'œil est défini par le cône qui s'appuie sur les bords de la fovéa et dont le sommet O est le centre optique de l'œil,. Son angle au sommet est d'environ 1°. Mais la rotation de l'œil accroît l'étendue du champ qui peut atteindre jusqu'à 40°.

2.2.2. Champ en profondeur

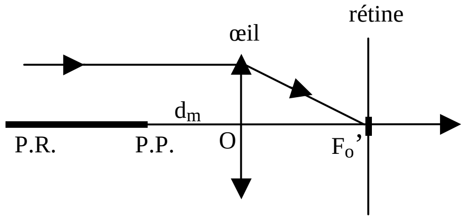
L'œil est dit normal quand l'image A' d'un objet A très éloigné se forme sur la rétine. Pour un œil normal au repos, le foyer image F_o' est donc sur la rétine, ou plus exactement au centre de la fovéa.

Si on rapproche l'objet, l'œil étant toujours au repos, son image se déplace et se forme en arrière de la rétine.



Pour voir nettement cette image, le cristallin se déforme sous l'effet des muscles, et sa distance focale varie de manière à ramener le foyer image sur la rétine et à considérer l'objet A à l'infini.

On dit que l'œil " accommode".Ce phénomène se poursuit jusqu'à une distance minimum où l'œil ne peut plus former l'image sur la rétine. Cette valeur représente la *distance minimale de vision distincte* d_m : le point A correspondant est le "punctum proximum"(P.P.).



En résumé, l'œil normal peut voir nettement des objets depuis un"punctum remotum" (P.R.), qui est à l'infini, jusqu'à un "punctum proximum" (P.P.) distant de l'œil d'environ 25 cm.

2.3. Défauts de l'œil

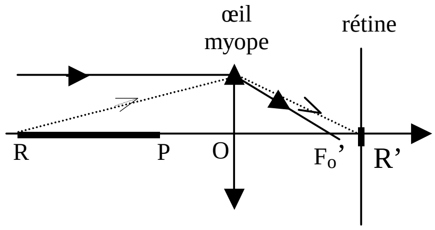
Un œil normal est dit "emmétrope" : l'image d'un point à l'infini se forme sur la rétine.

Un œil est dit anormal ou "amétrope", lorsqu'il donne, au repos, une image d'un point à l'infini en avant ou en arrière de la rétine.

2.3.1. Myopie

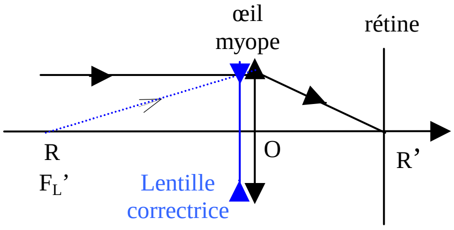
Si l'image se forme en avant de la rétine, donc au delà du foyer, le cristallin est trop convergent et l'œil est dit "myope".

Son punctum remotum est un point R à distance finie dont l'image R' se forme sur la rétine sans accommodation.



L'œil accommodant peut voir les points plus proches jusqu'à un punctum proximum P. La distance P-œil est inférieure à celle d'un œil normal.

Ce défaut est corrigé par une lentille divergente qui ramène le punctum remotum R à l'infini.

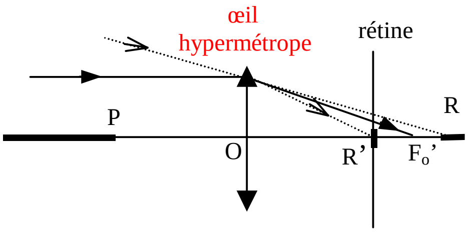


Un rayon parallèle à l'axe doit, après la traversée de la lentille correctrice, provenir de R . La distance focale de la lentille correctrice est donc égale à OR.

2.3.2. Hypermétropie

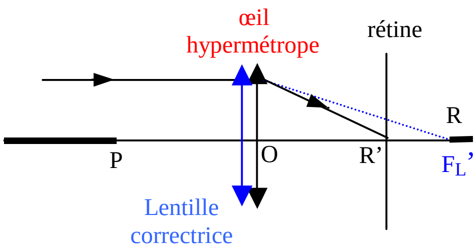
L'œil présente le défaut inverse de la myopie.

La rétine est en avant du foyer car le cristallin manque de convergence. L'œil doit accommoder pour voir à l'infini ; il est dit "hypermétrope".



Le punctum remotum R, est un point virtuel (son image R' se formant avant le foyer). Le punctum proximum P est plus éloigné que celui d'un œil normal.

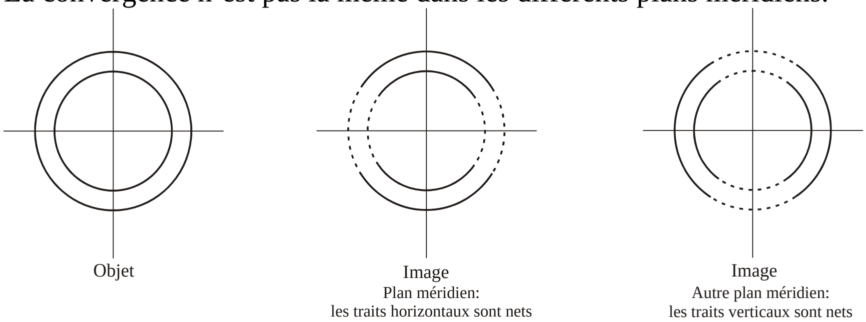
Ce défaut est corrigé par une lentille convergente dont la distance focale est OR : un rayon incident parallèle à l'axe émerge de la lentille correctrice en passant par R mais, après la traversée de l'œil, il converge en R' sur la lentille.



2.3.3.Astigmatisme

L'œil astigmate ne possède pas de symétrie de révolution autour de son axe.

La convergence n'est pas la même dans les différents plans méridiens.



Les images rétiniennes des deux bras d'une croix ne sont pas nettes simultanément.

Ce défaut est corrigé par une lentille cylindrique.

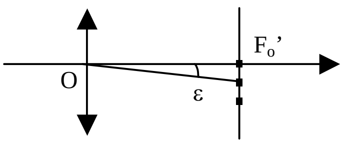
2.3.4. Presbytie

Ce défaut n'est pas dû à la conformation de l'œil ; il est dû à son vieillissement. Le cristallin perd de sa souplesse et les muscles qui permettent l'accommodation perdent leur élasticité. Par suite, le punctum proximum s'éloigne (le presbyte ne voit plus les objets rapprochés) alors que le punctum remotum n'est généralement pas modifié : un œil myope reste myope et un œil hypermétrope reste hypermétrope.

Ce défaut est corrigé par des lentilles convergentes dont la distance focale dépend de la position de l'objet à observer (verres à plusieurs foyers ou verres à foyers progressifs).

2.4. Pouvoir de résolution

La structure granulaire de la rétine limite la capacité de l'œil à distinguer des détails. Pour distinguer deux images ponctuelles sur la rétine, il faut que celles-ci se forment sur deux cellules distinctes c'est-à-dire séparées par une troisième.



L'ordre de grandeur du diamètre d'une cellule est de 4µm, la distance minimale des deux images doit être de l'ordre de 8 µm. La distance focale d'un œil normal au repos est de l'ordre de 20 mm.

La limite de résolution ε est alors de l'ordre de :

$\varepsilon \approx 4.10^{-4}$ rad ≈ 1,3'

Un œil normal, dont la distance minimale de vision distincte d_m = 25 cm (son punctum proximum est à 25 cm), peut distinguer des points distants de :

$a = \varepsilon\ d_m \approx 0{,}1$ mm environ.

L'angle ε représente le "diamètre apparent" d'un objet que l'œil peut voir.

C'est pour augmenter la vision des détails que l'on utilise les instruments d'optique comme la loupe ou le microscope.

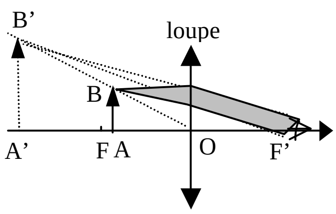
3. La loupe

La perception des détails, à l'œil nu, est limitée par la distance minimum de vision distincte d_m. Or, plus la distance objet-œil est petite, plus le pouvoir séparateur augmente et l'on pourrait observer plus de détails.

3.1. Principe de l'instrument

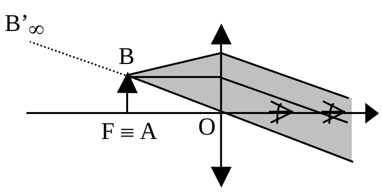
La loupe permet d'obtenir une image nette d'objets rapprochés.

C'est une lentille convergente de petite distance focale (2 à 5 cm). Elle doit donner une image virtuelle, droite et agrandie.



L'objet est donc placé entre la lentille et son foyer objet, très près de celui-ci. L'œil est alors placé près du foyer image de la loupe.

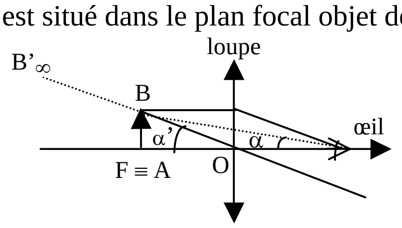
Il est préférable de placer l'objet dans le plan focal objet de la loupe : l'image se forme à l'infini et l'œil normal peut l'observer sans accommoder, dans ce cas la position de l'œil n'a pas d'importance.



3.2. Caractéristiques de la loupe

3.2.1. Grossissement

On se place dans les meilleures conditions c'est-à-dire dans le cas où on observe l'image à travers la loupe sans fatiguer l'œil. Cette image est donc à l'infini et l'objet $\overrightarrow{AB}$ est situé dans le plan focal objet de la loupe.



L'image A' de A est à l'infini dans la direction de l'axe et l'image B' de B est à l'infini dans la direction OB. Le diamètre apparent de l'image est α'.

On aura : $$g = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

Le *grossissement commercial* g_0 est obtenu lorsque A est placé au punctum proximum de l'œil (soit A- œil = d_m) et $\overrightarrow{AB}$ dans le plan focal objet de la loupe.

On a alors, si l'on écrit OA = $|f|$ = f ' :

$$\alpha' = \frac{AB}{f'}$$

$$\alpha_0 = \frac{AB}{d_m}$$

et $$\boxed{g_0 = \frac{\alpha'}{\alpha_0} = \frac{d_m}{f'}}$$

Ainsi, si d_m = 25 cm et f ' = 5 cm, alors g_0 = 5.

Une telle loupe vendue dans le commerce porte l'indication 5x, d_m étant pris conventionnellement égal à 25 cm.

3.2.2. Puissance

La puissance de la loupe est donnée par :

$$P = \frac{\alpha'}{AB}$$

La *puissance intrinsèque* P_i est obtenue pour un objet placé dans le plan focal objet de la loupe (A ≡ F), soit pour $\alpha' = \frac{AB}{f'}$.

La puissance intrinsèque d'une loupe est donc égale à la vergence :

$$\boxed{P_i = \frac{1}{f'} = C}$$

Une loupe de 5 cm de distance focale a une puissance intrinsèque de 20 dioptries.

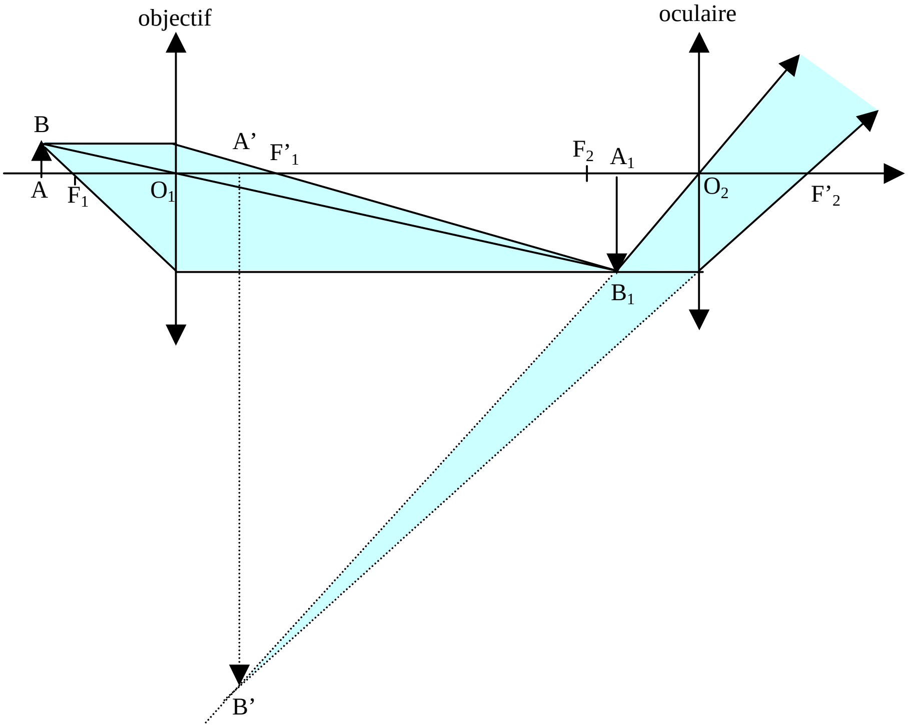
4. Le microscope

Le grossissement commercial d'une loupe augmente lorsque sa distance focale diminue. Mais une lentille de trop petite distance focale aurait des faces bombées, les angles d'incidence seraient trop grands et les défauts introduits dans ce cas seraient importants. Le grossissement commercial d'une loupe est donc limité (à environ 20).

Pour avoir de plus grands grossissements, il faut utiliser d'autres instruments comme le microscope.

4.1. Principe de l'instrument

Le microscope est constitué de deux systèmes optiques. Le premier, *l'objectif*, assimilé à une lentille convergente, donne d'un petit objet une image très agrandie qui est observée à travers un second système, *l'oculaire*, également assimilé à une lentille convergente ou loupe. L'image définitive est beaucoup plus grande que l'objet.



L'objet $\overrightarrow{AB}$ est placé très près mais au-delà du foyer objet F_1 de l'objectif. Celui-ci en donne une image $\overrightarrow{A_1B_1}$, réelle, renversée et très agrandie.

L'oculaire fonctionnant comme une loupe, $\overrightarrow{A_1B_1}$ doit être entre son centre optique O_2 et son foyer objet F_2 , très près de celui-ci.

L'image définitive $\overrightarrow{A'B'}$ est virtuelle, renversée par rapport à l'objet $\overrightarrow{AB}$ et encore agrandie par rapport à $\overrightarrow{A_1B_1}$. En particulier, si on veut voir cette image à l'infini, le point A_1 doit être confondu avec F_2.

Remarquons que si A_1 se forme avant F_2 , l'image $\overrightarrow{A'B'}$ est réelle, droite par rapport à l'objet et beaucoup plus grande que celui-ci. On peut alors la recevoir sur une plaque photographique.

4.2. Caractéristiques d'un microscope

4.2.1. Puissance

La puissance est par définition $P = \dfrac{\alpha'}{AB}$ où α' est le diamètre apparent de l'image définitive A'B' de l'objet AB. Cette expression peut s'écrire :

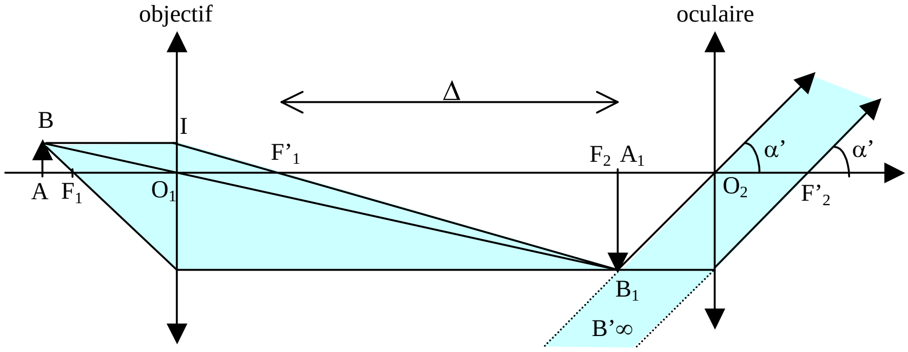
$$P = \frac{\alpha'}{A_1B_1} \cdot \frac{A_1B_1}{AB}$$

Le premier facteur est la puissance de l'oculaire, puisque A_1B_1 joue le rôle d'objet pour celui-ci.

Le deuxième facteur représente le grandissement linéaire transversal de l'objectif.

On a donc : $$P_{microscope} = P_{oculaire} \times \gamma_{objectif}$$

La puissance intrinsèque est obtenue lorsque l'instrument est utilisé dans les conditions où l'observateur vise à l'infini, c'est-à-dire lorsque l'image intermédiaire A_1B_1 est dans le plan focal objet de l'oculaire.



On a : $$P_{i\ oculaire} = \frac{1}{f'_{ocul.}}$$

Notons Δ la distance F'_1F_2 . Cette distance est une donnée du microscope. Elle est maintenue constante par un tube métallique.

La similitude des triangles O_1IF_1' et $A_1B_1F_1$' permet d'écrire :

$$\frac{A_1B_1}{OI} = \frac{A_1B_1}{AB} = \gamma_{objectif} = \frac{A_1F_1'}{O_1F'_1} = \frac{F_2F_1'}{O_1F_1'} = \frac{\Delta}{f'_{obj.}}$$

On a donc :

$$\boxed{P_{i\ microscope} = \frac{\Delta}{f'_{objectif}\, f'_{oculaire}}}$$

4.2.2. Grossissement

Le grossissement est par définition : $g = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$

Dans le cas d'une observation à l'infini (A_1B_1 est dans le plan focal objet de l'oculaire), on a :

$$\alpha' = \frac{A_1B_1}{f'_{ocul.}} \qquad \text{avec} \qquad A_1B_1 = AB\,\frac{\Delta}{f'_{obj.}}$$

soit

$$\alpha' = AB\,\frac{\Delta}{f'_{obj.}f'_{ocul.}}$$

L'angle α_0 sous lequel est vu l'objet placé au punctum proximum (à la distance d_m de vision distincte) est :

$$\alpha_0 = \frac{AB}{d_m}$$

Le grossissement commercial est donc :

$$\boxed{g_0 = \frac{\alpha'}{\alpha_0} = \frac{\Delta}{f'_{obj.}f'_{ocul.}}\,d_m = P_{i\ microscope} \cdot d_m}$$

ou encore : $g_0 = \dfrac{\Delta}{f'_{obj.}} \cdot \dfrac{d_m}{f'_{ocul.}} = \gamma_{objectif} \cdot g_{0\ oculaire}$

Ce sont des données commerciales indiquées sur le microscope par les constructeurs.

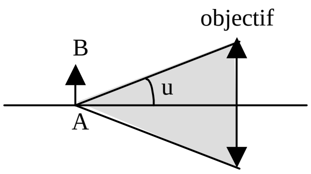
4.2.3. Pouvoir de résolution ou pouvoir séparateur

L'augmentation de la puissance améliore le pouvoir séparateur mais des phénomènes dus au caractère ondulatoire de la lumière (diffraction, …) interviennent alors et limitent ce pouvoir de résolution.

On montre que la plus petite distance entre deux points A et B que le microscope permet de distinguer est donnée par :

$$AB_{min} = \frac{1,22\,\lambda}{2n\sin u}$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide de la lumière utilisée, n l'indice du milieu dans lequel est placé l'objet et u l'angle maximal d'ouverture du faisceau qui entre dans l'objectif.



4.2.4. Ordres de grandeurs

La distance $\Delta = F_1'F_2$ est fixée conventionnellement par les constructeurs à 18 cm.

Les grandissements $\gamma_{objectif}$ sont de l'ordre de 10 à 100, ce qui correspond à une distance focale de l'objectif de 2 mm à 2 cm environ.

Les grossissements des oculaires sont de l'ordre de 5 à 20.

Cela correspond à des grossissements commerciaux qui vont de 50 à 2 000, soit à des puissances intrinsèques $P_i = \frac{g_0}{d_m}$ qui vont de 200 à 8 000 dioptries.

L'angle d'ouverture u de l'objectif est donné par $\text{tg } u = \frac{D}{2f'}$ où D est le diamètre de l'objectif.

Pour un objectif courant tg u est de l'ordre de 0,5 soit u ≈ 27°.

Si on utilise une lumière de longueur d'onde λ = 0,5 µm et si l'objet est placé dans l'air (n = 1), le pouvoir de résolution est de l'ordre de 0,7 µm.

5. La lunette astronomique

Comme son nom l'indique, cet instrument sert à l'observation des astres.

5.1. Principe de l'instrument

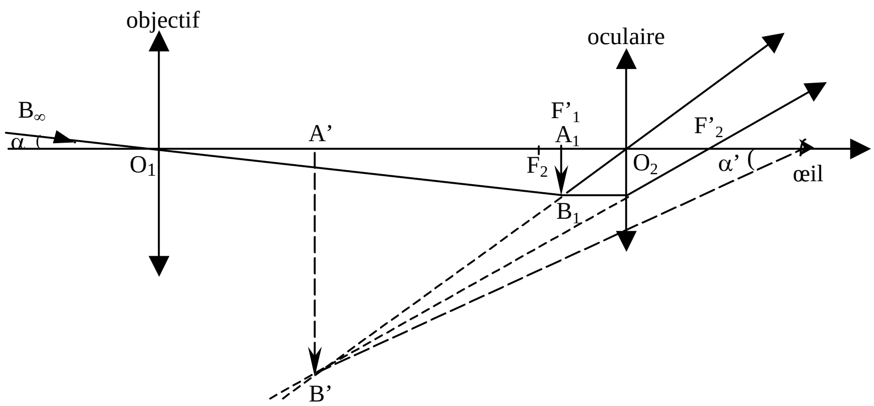
Comme le microscope, cet instrument se compose de deux systèmes que nous supposerons réduits à deux lentilles minces convergentes : l'*objectif* et l'*oculaire*.

Le rôle de l'oculaire est le même que dans le microscope : il sert de loupe pour l'observation de l'image donnée par l'objectif, sa distance focale est encore de l'ordre de quelques centimètres.

Par contre, l'objectif diffère essentiellement de celui du microscope : il fournit de l'objet à l'infini une image dans son plan focal image qui est d'autant plus grande que la distance focale de l'objectif est elle-même plus grande. L'objectif atteint de très grandes dimensions pour les lunettes des observatoires : jusqu'à un mètre d'ouverture et 20 mètres de distance focale.

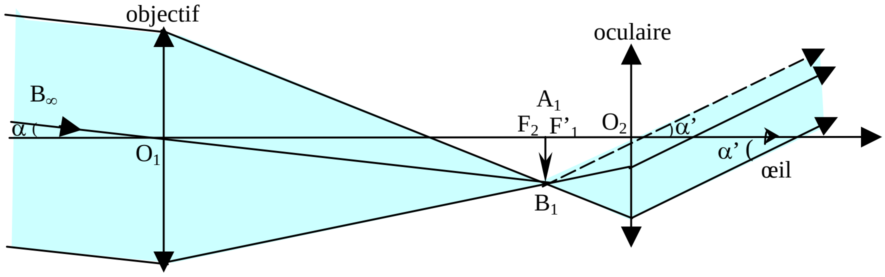
L'objet $\overrightarrow{AB}$ est pratiquement à l'infini, le point A dans la direction de l'axe, le point B dans la direction qui fait avec l'axe l'angle α qui est le diamètre apparent de l'objet.

L'image intermédiaire fournie par l'objectif est $\overrightarrow{A_1B_1}$. Elle est située dans le plan focal image de celui-ci. Elle sert d'objet pour l'oculaire qui fonctionne comme une loupe : le point A_1 est situé entre son centre optique et son foyer objet. L'image définitive $\overrightarrow{A'B'}$ est virtuelle et renversée par rapport à l'objet $\overrightarrow{AB}$. L'œil la voit sous l'angle α' beaucoup plus grand que le diamètre apparent de la vision à l'œil nu.



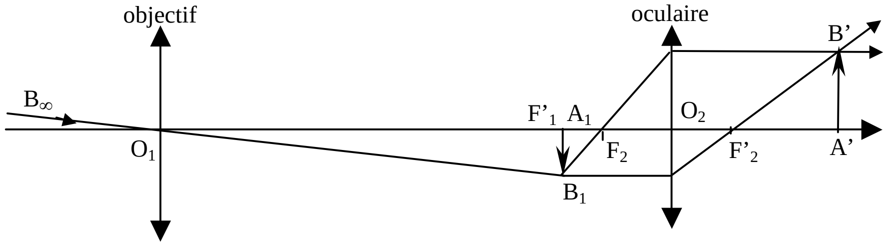
L'observation optimale est, là encore, obtenue lorsque l'image $\overrightarrow{A'B'}$ est à l'infini c'est-à-dire lorsque A_1 est au foyer objet F_2 de l'oculaire. Les deux foyers, image F'_1 de l'objectif et objet F_2 de l'oculaire, sont alors confondus. Pour ce faire, il suffit de déplacer l'oculaire vers l'observateur.

Un faisceau parallèle issu de B est alors transformé à la sortie de la lunette en un autre faisceau parallèle. La lunette est donc, dans ce cas, un système afocal.



Remarque

Si l'on veut recevoir l'image finale A'B' sur un écran ou la photographier, celle-ci doit être réelle. Cela impose que l'image A_1B_1 se forme avant le plan focal objet de l'oculaire ; l'image A'B' sera donc réelle, droite et plus grande que l'objet.



5.2. Grandeurs caractéristiques

5.2.1. Grossissement

Il est donné par : $$g = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

5.2.1.1. Cas général

Si l'on désigne par f'_1 la distance focale de l'objectif et par f'_2 celle de l'oculaire, on a :

$$\alpha = \frac{A_1B_1}{f'_1}$$

$$P_{oculaire} = \frac{\alpha'}{A_1B_1}$$

d'où :

$$\boxed{g = \frac{\alpha'}{\alpha} = P_{oculaire} \, . \, f'_{1\ objectif}}$$

Le grossissement de la lunette est dans tous les cas égal au produit de la puissance de l'oculaire par la distance focale de l'objectif.

Pour un objectif de 15 mètres de distance focale et un oculaire de 20 dioptries, le grossissement est de 300 : la lunette fait voir l'objet comme s'il était 300 fois plus proche.

5.2.1.2.- Cas d'une lunette afocale

La puissance de l'oculaire est égale à sa vergence : $P_{oculaire} = \frac{1}{f'_2}$

Donc :

$$\boxed{g = \frac{f'_1}{f'_2}}$$

On peut retrouver ce résultat en considérant les deux triangles $O_1A_1B_1$ et $O_2A_1B_1$. On peut écrire :

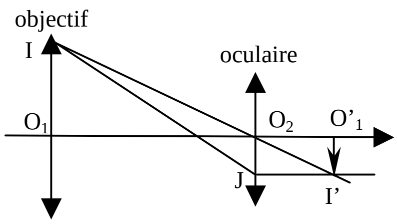
$$\alpha = \frac{A_1B_1}{O_1A_1} = \frac{A_1B_1}{f'_1}$$

$$\alpha' = \frac{A_1B_1}{O_2A_1} = \frac{A_1B_1}{f'_2}$$

d'où

$$g = \frac{f'_1}{f'_2}$$

On peut donner une autre expression du grossissement en faisant intervenir le " *cercle oculaire* " *qui est l'image de l'objectif donnée par l'oculaire*.



L’image du point I, bord de l’objectif, est en I’, celle de O_1 est en O'_1 et l’on a :

$O'_1I' = O_2J =$ rayon du cercle oculaire.

Si l’on désigne par "R" le rayon de l’objectif, par "r" le rayon du cercle oculaire et par F le point commun (F'_1,F_2), la similitude des triangles O_1IF et O_2JF donne :

$$\frac{O_1I}{O_2J} = \frac{O_1F}{O_2F}$$

soit :

$$\boxed{\frac{R}{r} = \frac{f'_1}{f'_2} = g}$$

Ce dernier résultat fournit un moyen simple pour mesurer le grossissement d’une lunette : il suffit de mesurer les rayons R et r de l’objectif et du cercle oculaire.

5.2.2. Puissance

La notion de puissance n’offre ici aucun intérêt : l’objet ayant des dimensions considérables, la puissance serait extrêmement petite.

5.2.3. Pouvoir séparateur

Là encore des phénomènes interviennent et limitent le pouvoir séparateur de la lunette, le plus important étant le caractère ondulatoire de la lumière.

Le diamètre angulaire de deux objets distants A et B et que peut séparer la lunette est donné par :

$$\theta = \frac{1{,}22\,\lambda}{D}$$

où λ est la longueur d’onde dans le vide de la lumière utilisée et D le diamètre de l’objectif.

5.3. Autres instruments similaires

La lunette astronomique inverse l’image par rapport à l’objet. Cela pourrait être gênant dans le cas d’observation d’objets terrestres éloignés

On peut pallier ce "défaut" en utilisant :

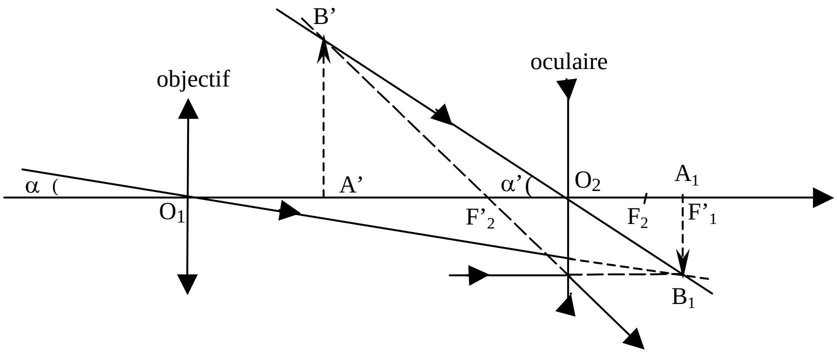
- une lentille convergente placée entre l’objectif et l’oculaire convergent : l’instrument obtenu est la "*longue vue*". La lentille L_3 est placée de sorte que l’image A_1B_1 joue le rôle d’objet réel pour cette lentille et se forme avant son foyer objet F_3,

- un système de prismes à réflexion totale : c’est le cas des "*jumelles à prismes*" formées de deux lunettes de ce type d’axes parallèles,
- une lentille divergente comme oculaire: c’est la lunette de Galilée qui sera étudiée dans le paragraphe suivant. L’ensemble de deux ces lunettes, d’axes parallèles, constitue les "*jumelles de théâtre*".

6. La lunette de Galilée

6.1. Principe de l’instrument

La lunette de Galilée est constituée de deux systèmes réduits à des lentilles : l’objectif assimilé à une lentille convergente et l’oculaire assimilé à une lentille divergente. Mais contrairement à la lunette astronomique, la distance focale de l’objectif n’est pas grande, de l’ordre de quelques centimètres.



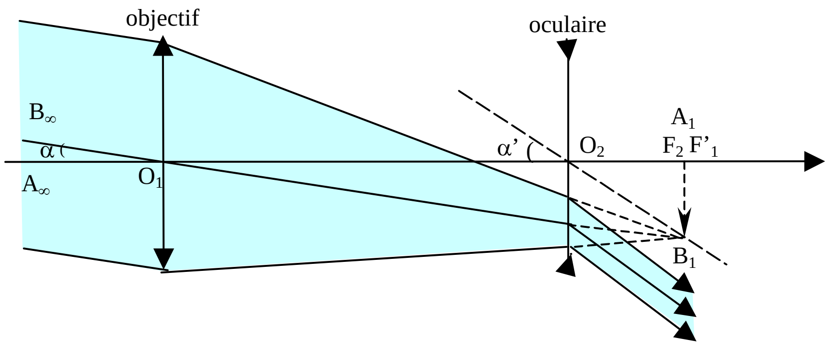
L’objectif donne de l’objet $\overrightarrow{AB}$ une image $\overrightarrow{A_1B_1}$ dans son plan focal image.

L’oculaire divergent est placé entre l’objectif et cette image qui joue donc le rôle d’un objet virtuel. Elle doit se former au delà du foyer objet F_2 de l’oculaire.

L’image définitive $\overrightarrow{A'B'}$ est alors virtuelle, droite par rapport à $\overrightarrow{AB}$ et plus grande que $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Un observateur à vue normale qui n’accommode pas, souhaiterait que l’image définitive $\overrightarrow{A'B'}$ soit à l’infini. L’image intermédiaire $\overrightarrow{A_1B_1}$ doit donc se former dans le plan focal objet de l’oculaire : les deux foyers F'_1 (foyer image de l’objectif) et F_2 (foyer objet de l’oculaire) devront donc être confondus.

Un faisceau incident parallèle à la direction O_1B, émerge de l'oculaire parallèle à la direction O_2B_1. La lunette de Galilée utilisée dans ces conditions est afocale.



La longueur de la lunette est égale à la différence des distances focales de l'objectif et de l'oculaire

$$L = f'_1 - f'_2$$

6.2. Grossissement

C'est la seule grandeur caractéristique intéressante. Nous allons la déterminer uniquement dans le cas d'une lunette afocale.

Le diamètre apparent de l'image définitive $\overrightarrow{A'B'}$ est α'

$$\alpha' = \frac{A_1B_1}{O_2F_2} = \frac{A_1B_1}{f'_2}$$

Le diamètre apparent de l'objet $\overrightarrow{AB}$ est α

$$\alpha = \frac{A_1B_1}{O_1F'_1} = \frac{A_1B_1}{f'_1}$$

soit : $$g = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f'_1}{f'_2}$$

C'est la même expression que pour la lunette astronomique. Mais on n'atteint pas ici les forts grossissements de la lunette astronomique. Ainsi, pour un objectif de 8 cm de distance focale et un oculaire de 2 cm de distance focale, on a un grossissement de 4, ce qui est suffisant pour une jumelle de théâtre. Son encombrement est faible (6 cm) : elle est facilement transportable.

7. Le télescope

C'est un instrument analogue à la lunette astronomique, servant à observer les astres, mais dans lequel les constituants de l'objectif ne sont plus des lentilles mais des miroirs, le miroir principal est concave et le miroir secondaire pouvant être plan, convexe ou concave.

7.1. Principe de l'instrument

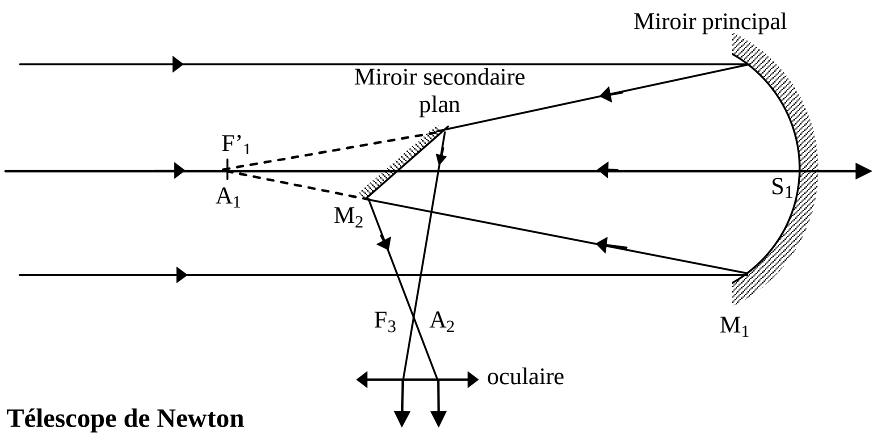
Le miroir concave principal M_1 est placé de telle sorte que son axe optique soit dirigé vers le centre de l'astre à observer.

Les faisceaux de rayons incidents parallèles sont réfléchis en convergeant vers le plan focal image du miroir M_1. L'oculaire devrait être placé dans ce plan focal mais ceci est difficile à réaliser car on se placerait sur le chemin des rayons incidents. C'est pourquoi on utilise un second miroir M_2, beaucoup plus petit, qui forme l'image définitive en dehors du faisceau incident.

Cette image réelle est reçue sur un détecteur ou observée à l'aide de l'oculaire.

L'image A_1 de A, sur l'axe, donnée par le miroir principal se forme au foyer image de ce miroir et l'image A_2 de A_1 donnée par le miroir secondaire est placée au foyer objet F3 de l'oculaire qui en donne une image définitive A' à l'infini regardée sans accommodation par l'observateur.

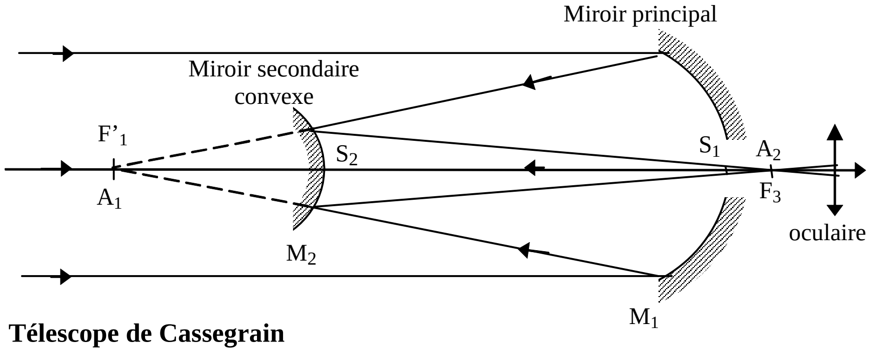
La figure suivante donne le schéma d'un télescope utilisant comme miroir secondaire un miroir plan : c'est le télescope de Newton.



Télescope de Newton

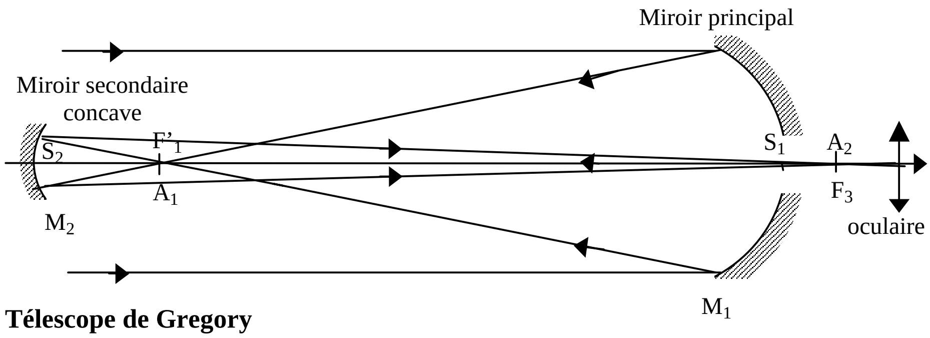
L'utilisation comme miroir secondaire de miroirs convexe ou concave nécessite de percer une ouverture au sommet du miroir principal pour laisser

passer le faisceau réfléchi par ce miroir, comme le montrent les figures suivantes.



Télescope de Cassegrain

Dans le montage de Cassegrain le miroir secondaire convexe doit être placé avant le foyer image F'_1 du miroir principal pour que le faisceau réfléchi soit convergent.



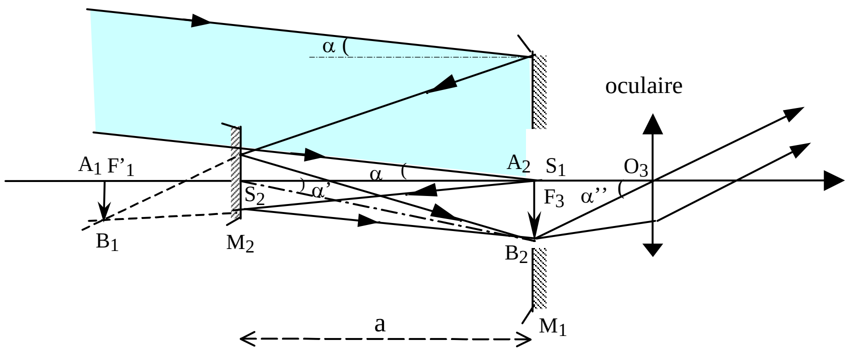
Télescope de Gregory

Le miroir secondaire concave du télescope de Gregory est placé après le foyer image F'_1 du miroir principal.

On utilise en général les télescopes avec des miroirs secondaires convexes ou concaves en les réglant, en déplaçant le miroir secondaire, de sorte que l'image $\overrightarrow{A_2B_2}$ donnée par les deux miroirs de l'objectif se forme dans le plan tangent en S_1 au miroir M_1.

Par ailleurs, les astres étant très éloignés, les angles d'incidence sur les miroirs sont faibles et les rayons lumineux sont para axiaux. Le système est donc utilisé dans les conditions de stigmatisme approché de Gauss.

Nous représenterons donc le télescope de Cassegrain, par exemple, comme suit :



Le faisceau incident parallèle provenant de B_∞ se réfléchit sur M_1 et converge en B_1 tel que $\overrightarrow{A_1B_1}$ soit dans le plan focal image de M_1.

Le rayon incident qui se réfléchirait en S_1, si M_1 n'était pas percé, et passerait par B_1, se réfléchit sur M_1 symétriquement à l'axe optique. L'angle d'incidence de ce rayon est α, diamètre angulaire de l'astre.

Le rayon angulaire de l'image $\overrightarrow{A_2B_2}$, obtenue après réflexion sur M_2, est α'. Cette image est vue de l'oculaire sous un angle α''.

7.2. Grossissement

7.2.1. Grossissement de l'objectif

Ce grossissement est défini par : $g = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$

L'angle α est donné par :

$$\alpha = \frac{A_1B_1}{S_1F'_1} = \frac{A_1B_1}{f'_1}$$, f'_1 étant la distance focale du miroir M_1.

L'angle α' est égal à :

$$\alpha' = \frac{A_2B_2}{S_1S_2} = \frac{A_2B_2}{a}$$ où "a" est la distance des deux miroirs.

Le grossissement de l'objectif est donc donné par :

$$\boxed{g_{\text{objectif}} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1}\frac{f'_1}{a} = \gamma_{M_2}\frac{f'_1}{a}}$$

où γ_{M_2} est le grandissement linéaire transversal du miroir secondaire.

7.2.2. Grossissement du télescope

Le grossissement du télescope est donné par :

$$g_{\text{télescope}} = \frac{\alpha''}{\alpha} = \frac{\alpha''}{\alpha'}\frac{\alpha'}{\alpha}$$

avec : $\alpha'' = \frac{A_2B_2}{O_3F_3} = \frac{A_2B_2}{f'_3}$ où f'_3 est la distance focale de l'oculaire.

soit : $\frac{\alpha''}{\alpha'} = \frac{A_2B_2}{f'_3}\frac{a}{A_2B_2} = \frac{a}{f'_3}$

et : $g_{\text{télescope}} = \frac{a}{f'_3}\gamma_{M_2}\frac{f'_1}{a}$

$$\boxed{g_{\text{télescope}} = \gamma_{M_2}\frac{f'_{M1}}{f'_{\text{oculaire}}}}$$

Le grossissement d'un télescope est d'autant plus grand que la distance focale du miroir principal M_1 est grande. Le diamètre de ce miroir doit être grand.

Nous avons vu que dans le cas de la lunette astronomique, le grossissement dépendait également de la distance focale de la lentille de l'objectif. Mais il est techniquement plus facile de réaliser de grands miroirs que de grandes lentilles. C'est un des avantages que présentent les télescopes sur les lunettes.

Exercices et problèmes

EP.9.1. :Œil myope

Un œil myope est assimilable, quand il n'accommode pas, à une lentille de 15 mm de distance focale. La rétine est alors située à 1 mm au delà du foyer image F'_O.

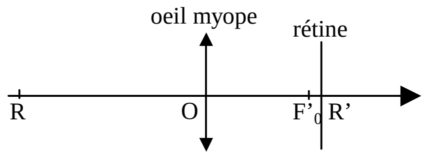
Déterminer :

1. La distance de l'œil au punctum remotum

2. Le numéro de la lentille correctrice à utiliser

Solution

L'œil n'accommodant pas, le punctum remotum R doit avoir son image en R' sur la rétine.



1. Distance OR :

On a :

$$\frac{1}{\overline{OR'}} - \frac{1}{\overline{OR}} = \frac{1}{\overline{OF'_O}}$$

avec: $\overline{OF'_O} = 15\text{ mm}$ et $\overline{OR'} = 15 + 1 = 16\text{ mm}$

soit: $\overline{OR} = -240\text{ mm} = -0{,}24\text{ m}$

2. Lentille correctrice :

Le verre correcteur est une lentille divergente dont le foyer image est en R. Sa distance focale est donc $f'_C = -0{,}24\text{ m}$ et sa vergence est :

$$C = -\frac{1}{0{,}24} = -4{,}2\text{ dioptries}$$

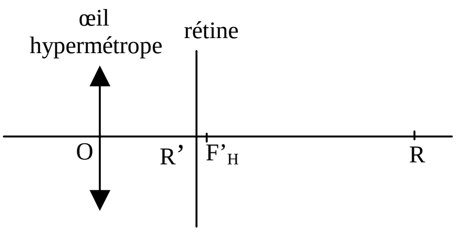
Le numéro demandé est : - 4,2.

EP.9.2. : Œil hypermétrope

Mêmes questions que l'exercice EP.9.1. pour un œil hypermétrope dont la distance focale est de 15 mm quand il n'accommode pas et dont la rétine est alors située à 1 mm en deçà du foyer image F'_H.

Solution

Le punctum remotum est un point virtuel R dont l'image R' donnée par l'œil est sur la rétine.



1. Distance OR :

On a :

$$\frac{1}{\overline{OR'}} - \frac{1}{\overline{OR}} = \frac{1}{\overline{OF'_H}}$$

avec: $\overline{OF'_H} = 15\ \text{mm}$ et $\overline{OR'} = 15 - 1 = 14\ \text{mm}$

soit: $\overline{OR} = 210\ \text{mm} = 0{,}21\ \text{m}$

2. Lentille correctrice :

Le verre correcteur est une lentille convergente dont le foyer image est en R. Sa distance focale est donc $f'_C = +0{,}21\ \text{m}$ et sa vergence est :

$$C = \frac{1}{0{,}21} = +4{,}8\ \text{dioptries}$$

Le numéro demandé est : + 4,8.

EP.9.3. : Lentilles de contact

Un individu myope ne peut pas voir nettement des objets situés à plus de 40 cm. Pour corriger sa myopie, il souhaite porter des lentilles de contact.

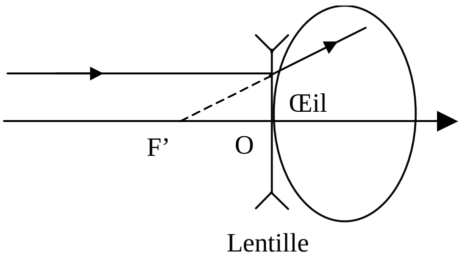
On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.

1. Quel type de lentille de contact faut-il pour corriger ce défaut (convergente ou divergente) ? Trouver sa distance focale.

2. La lentille de contact est une lentille mince collée sur l'œil de rayon de courbure 7,7 mm. Trouver les rayons de courbure de la lentille de contact sachant que son indice est égal à n=1,5.

Solution

1. Pour corriger ce défaut de myopie, on choisit une lentille qui va ramener les objets de l'infini à la distance de 40 cm de l'œil. Il s'agit nécessairement d'une lentille divergente comme le montre la figure .



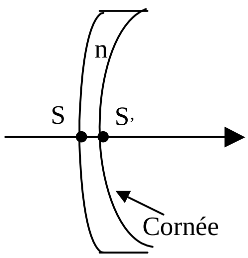
On a donc $\overline{OF'} = -0{,}4$ m.

2. La lentille de contact est donc un ménisque de rayons de courbure R et R' où R' est le rayon de courbure de la cornée. D'après la relation suivante :

$\dfrac{1}{\overline{OF'}} = (n-1)\left(\dfrac{1}{\overline{SC}} - \dfrac{1}{\overline{S'C'}}\right)$ et sachant que $\overline{S'C'} = 0{,}0077$ m, on trouve

$$\overline{SC} = \frac{1}{\dfrac{1}{\overline{S'C'}} + \dfrac{1}{(n-1)\,\overline{OF'}}} = 0{,}008 \text{ m.}$$

Il s'agit donc d'un ménisque à bords épais (qui est bien une lentille divergente)



Remarque : Dans le cas d'un individu hypermétrope, la lentille de contact est un ménisque à bords minces convergent.

EP.9.4. : Loupe

Une loupe a pour distance focale 2,5 cm.
Déterminer :
1- Sa puissance intrinsèque et son grossissement commercial
2- La plus petite distance de deux points qu'elle permet de distinguer, sachant que l'objet est dans le plan focal objet et que le pouvoir séparateur de l'œil est de 3.10^{-4} rad.

Solution

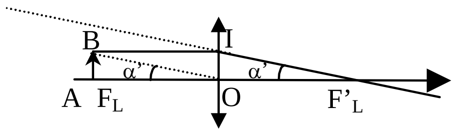
1- Puissance intrinsèque :

$$P_i = C = \frac{1}{f'_L} = \frac{1}{0,025} = 40 \text{ dioptries}$$

Grossissement commercial :

$$g_0 = \frac{d_m}{f'_L} = P_i\, d_m = 40 \times 0,25 = 10$$

2- Pouvoir séparateur:



Le diamètre apparent sous lequel sont vues les images des deux points A et B est :

$$\alpha' = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{f}$$

Cet angle doit être au moins égal $3 \,.\, 10^{-4}$ radian

soit : $AB_m = 7,5\ \mu m$

EP.9.5. : Oculaire

Soit un oculaire comprenant deux lentilles convergentes, la première L_1 rencontrée par la lumière, appelée ″lentille de champ″, a une distance focale f'_1, la seconde L_2, ou ″lentille d'œil″, a pour distance focale f'_2.

1- Montrer que l'image du foyer objet F de l'oculaire donnée par la lentille de champ L_1 est le foyer objet F_2 de la lentille d'œil L_2 et que son foyer image F' est l'image donnée par la lentille d'œil L_2 du foyer image F'_1 de la lentille de champ L_1.

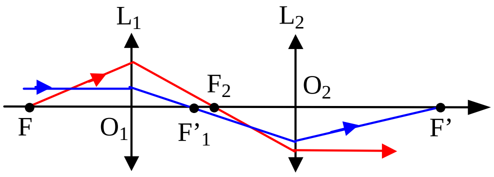
2- Sachant que $f'_1 = \dfrac{\overline{O_1O_2}}{2} = 3f'_2$ = 3 cm et que le pouvoir de résolution angulaire de l'œil est égal à $\alpha_m = 3.10^{-4}$ rad, déterminer :

2.a. la position des foyers F et F' de l'oculaire

2.b. le pouvoir séparateur de l'ensemble oeil – oculaire

Solution

1- Les rayons provenant du foyer objet F de l'oculaire en émergent parallèlement à l'axe. Ils passent donc par le foyer objet F_2 de la lentille d'œil L_2 ; F_2 est par conséquent l'image de F donnée par L_1.



Les rayons incidents parallèles à l'axe passent par le foyer image F'_1 de la lentille L_1 et émergent de l'oculaire en passant par son foyer image F'. F'_1 est donc l'image de F' donnée par la lentille L_1.

2.a. Position des foyers

On a : $F \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} \infty$

En appliquant la formule de conjugaison avec origines aux foyers à la lentille L_1 on obtient :

$$\overline{F_1F}\,.\,\overline{F'_1F_2} = -f'^2_1$$

avec : $\overline{F'_1F_2}$ = 2 cm,

soit : $\overline{F_1F}$ = - 4,5 cm et $\overline{O_1F}$ = - 7,5 cm

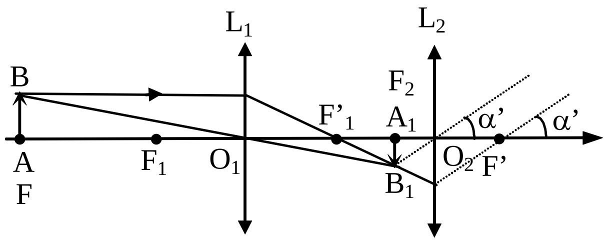
Par ailleurs : $F'_1 \xrightarrow{L_2} F'$

d'où $\overline{F_2F_1'}\,.\,\overline{F'_2F'} = -f'^2_2$

soit : $\overline{F'_2F'}$ = + 0,5 cm $\overline{O_2F'}$ = + 1,5 cm

Pouvoir séparateur :

Soit un petit objet $\overrightarrow{AB}$ situé dans le plan focal objet de l'oculaire.



L'image de $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{FB}$ est à l'infini. Elle est vue sous l'angle α'.

L'image $\overrightarrow{A_1B_1}$ de $\overrightarrow{AB}$ à travers L_1 se forme dans le plan focal objet de L_2, $\overrightarrow{A_1B_1} \equiv \overrightarrow{F_2B_1}$, et telle que :

$$\frac{F_2B_1}{FB} = \frac{F'_1F_2}{O_1F'_1} = \frac{2}{3}$$

d'où : $$\alpha' = \frac{F_2B_1}{O_2F_2} = \frac{2}{3}\frac{FB}{f'_2}$$

Cet angle doit être au moins égal au pouvoir de résolution angulaire α_m de l'œil, soit :

$$FB_m = \frac{3}{2}\alpha_m f'_2 = 45\ \mu m$$

EP.9.6. : Lunette astronomique

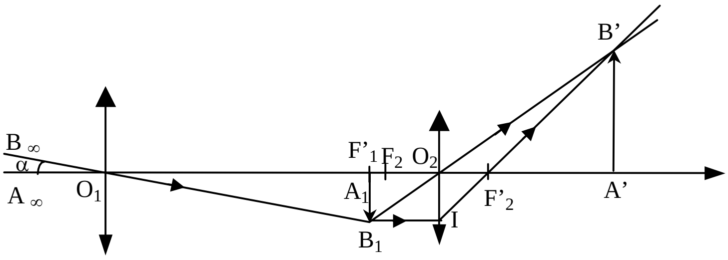
Pour projeter sur un écran une image assez grande du Soleil, dont le diamètre apparent est 30 minutes, on utilise une lunette astronomique dont la distance focale de l'objectif est de 1 m et celle de l'oculaire de 4 cm.

On rend d'abord la lunette afocale, puis on éloigne l'oculaire de 2mm.

Déterminer la nature, la position et la grandeur de l'image.

Solution

Construction de l'image :



L'axe de la lunette est dirigé vers le centre du Soleil. L'image donnée par l'objectif se forme dans son plan focal image : c'est un cercle de centre F'_1 et de rayon A_1B_1. L'oculaire donne l'image définitive qui est le cercle de centre A' et de rayon A'B'.

L'image intermédiaire $\overrightarrow{A_1B_1}$ se trouve avant le foyer image de l'oculaire puisque l'on a reculé l'oculaire, l'image définitive $\overrightarrow{A'B'}$ est donc réelle, droite et plus grande que $\overrightarrow{A_1B_1}$.

La position de A’ est donnée par la relation de conjugaison avec origine aux foyers de l’oculaire :

$$\overline{F_2A_1}\,.\,\overline{F'_2A'} \;=\; \overline{F_2O_2}\,.\,\overline{F'_2O_2} \;=\; -f'^2_2$$

$$\overline{F'_2A'} \;=\; \frac{-f'^2_2}{\overline{F_2A_1}} \;=\; \frac{-f'^2_2}{\overline{F_2F'_1}} \;=\; \frac{-16}{-0{,}2} \;=\; 80\text{ cm}$$

Le grandissement de l’oculaire est :

$$G \;=\; \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \;=\; \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_2I}} \;=\; \frac{\overline{F'_2A'}}{\overline{F'_2O_2}} \;=\; \frac{80}{4} \;=\; 20$$

Dans le triangle rectangle $O_1A_1B_1$ on a :

$$\alpha \;=\; \frac{A_1B_1}{O_1F'_1} \;=\; \frac{A_1B_1}{f'_1} \;=\; 15\,\text{mn} \;=\; \frac{1}{220}\text{ radian}$$

(α est la moitié du diamètre apparent du Soleil)

soit : $A_1B_1 \;=\; \alpha\, f'_1 \;=\; \dfrac{100}{220} \;=\; 0{,}45$ cm

d’où $A'B' \;=\; 20\, A_1B_1 \;=\; 9$ cm

L’image est donc réelle, droite , à 84 cm de l’oculaire et a pour diamètre 18 cm.

EP.9.7. : Lunette de Galilée

Une lunette de Galilée afocale est formée d’un objectif de distance focale f'_1 = 12 cm et d’un oculaire de distance focale f'_2 = 3 cm.

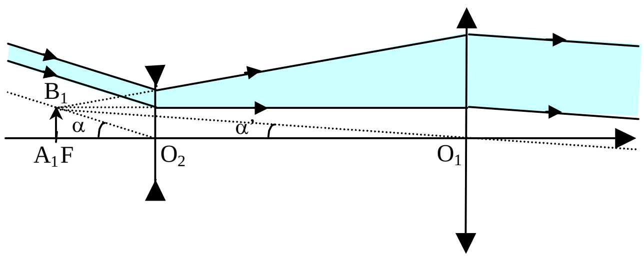
Un observateur l’utilise en la retournant, les rayons lumineux rencontrant d’abord l’oculaire.

1- Construire la marche d’un faisceau lumineux issu d’un point B à très grande distance non situé sur l’axe.

2- Déterminer le grossissement.

Solution

1- Marche des rayons lumineux issus du point B



L’image de B donnée par l’oculaire est en B_1, dans le plan focal image de l’oculaire qui est également le plan focal objet de l’objectif puisque la lunette est afocale : $F'_2 \equiv F_1 \equiv F \equiv A_1$.

L'objectif transforme le faisceau issu de B_1 en un faisceau cylindrique parallèle à la direction B_1O_1.

2- Grossissement

L'image définitive est vue, quelle que soit la position de l'œil, sous l'angle α' alors que le diamètre apparent de l'objet est α.

Le grossissement est donc :

$$g = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

avec : $\alpha' = \frac{FB_1}{O_1F}$ et $\alpha = \frac{FB_1}{O_2F}$

soit : $g = \frac{O_2F}{O_1F} = \frac{f'_2}{f'_1} = \frac{1}{4}$

alors que le grossissement de la lunette utilisée dans le bon sens serait :

$$g = \frac{f'_1}{f'_2} = 4$$

L'objet paraît donc rapetissé comme s'il était 4 fois plus éloigné.

EP.9.8. : Jumelles de théâtre

Une lunette de Galilée a un objectif de 15 cm de distance focale; et un oculaire de 3 cm de distance focale.

1- Un observateur infiniment presbyte (c'est-à-dire ne voyant nettement qu'à l'infini) utilise cette lunette.

Quelle est la longueur de l'instrument et quel est son grossissement ?

2- Un myope, dont le punctum remotum (P.R.) est à 25 cm, utilise ensuite la même lunette.

Dans quel sens et de combien doit-il déplacer l'oculaire pour observer sans accommoder ?

3- Quel est, dans ce dernier cas, le grossissement ?

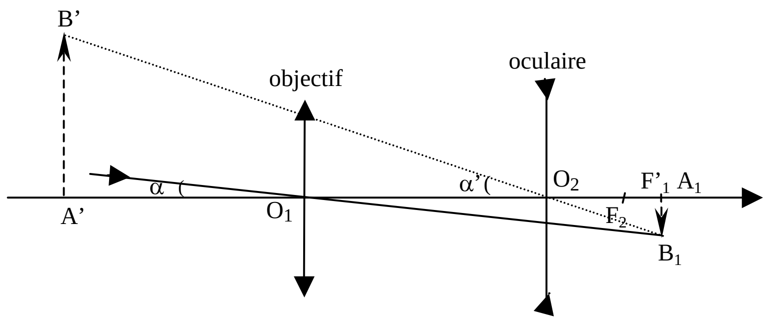
Solution

1- La lunette est afocale. Sa longueur est la différence des distances focales, soit :

$$L = O_1O_2 = f'_1 - f'_2 = 12 \text{ cm}$$

Le grossissement est : $g = \frac{f'_1}{f'_2} = 5$

2-



Le myope souhaiterait que l'image intermédiaire $\overrightarrow{A_1B_1}$, qui se trouve dans le plan focal image de l'objectif, se forme dans le plan focal objet de l'oculaire (le foyer objet étant en F_2) pour observer l'image définitive $\overrightarrow{A'B'}$ à l'infini donc sans accommoder.

Le déplacement recherché est donc x = $\overline{F'_1F_2}$

Appliquons, à l'oculaire, la relation de conjugaison avec origine au centre optique O_2 (lentille divergente, objet et image virtuels) sachant que l'image définitive $\overrightarrow{A'B'}$, virtuelle, est au punctum remotum, soit :

$$\overline{O_2A'} = -25 \text{ cm}$$

On a:

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2F'_2}} = -\frac{1}{\overline{O_2F_2}}$$

$$\frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2A'}} + \frac{1}{\overline{O_2F_2}} = \frac{1}{-25} + \frac{1}{3} = \frac{22}{75}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{O_2A_1} = \frac{75}{22} = 3{,}41 \text{ cm}$$

avec: $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2F_2} + \overline{F_2F'_1} = f_2 - x = 3 - x$

soit $x = -0{,}41 \text{ cm} = -4{,}1 \text{ mm}$

Le myope doit donc *"raccourcir"* la lunette de 4,1 mm pour ramener A_1 en F_2.

3- Le diamètre apparent de l'objet est :

$$\alpha = \frac{A_1B_1}{O_1F'_1}$$

celui de l'image est :

$$\alpha' = \frac{A_1B_1}{O_2A_1}$$

Le grossissement est donc :

$$g = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{O_1F'_1}{O_2A_1} = \frac{15}{3{,}41} = 4{,}4$$

Il est donc plus petit que pour la lunette afocale.

EP.9.9. : Télescope

L'axe d'un grand miroir sphérique M_1 de 16 m de rayon est dirigé vers le centre du Soleil.

1. Déterminer la position et le diamètre de l'image sachant que le diamètre apparent du Soleil est de 0,5 degré.

2. Un petit miroir plan M_2, incliné à 45° sur l'axe du miroir M_1, est placé entre M_1 et son foyer, à 20 cm de celui-ci.

Quelles sont la nature, la position et la grandeur de l'image du Soleil après réflexion sur M_2 ?

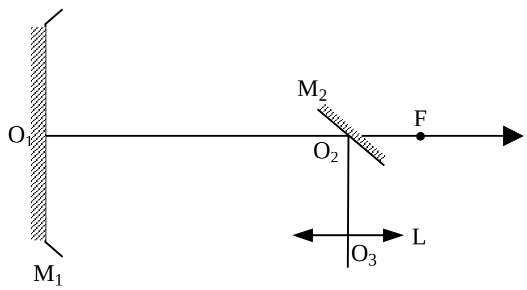
3. Cette dernière image est observée à travers un oculaire qui est assimilé à une lentille convergente de 4 cm de distance focale. L'observateur vise à l'infini.

Déterminer :

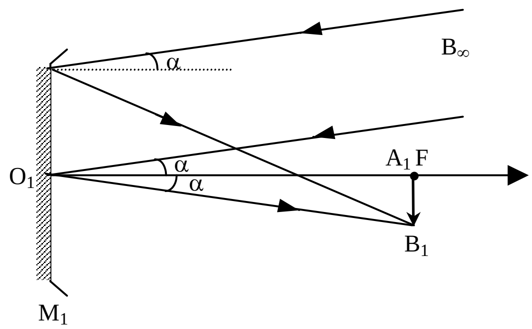
3.a. la distance entre le centre O_2 du miroir plan et le centre optique O_3 de l'oculaire,

3.b. le diamètre apparent de l'image définitive,

3.c. le grossissement de l'instrument ainsi constitué (télescope de Newton).



Solution



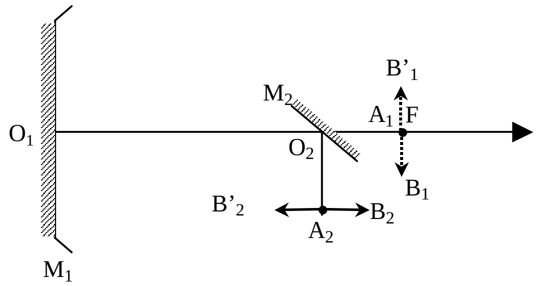
1. Le Soleil étant à l'infini, son image se forme dans le plan focal du miroir M_1.

On a donc : $O_1F = 8$ m

Son rayon est donné par : $FB_1 = \alpha \, O_1F$ où α est le rayon apparent du Soleil : $\alpha = 15$ mn $= 1,5 \,.10^{-4}$ rad

Le diamètre de l'image est donc : $B'_1B_1 = 2\,\alpha\,O_1F = 24\,.10^{-4}$ m = 2,4 mm

2.



Lorsqu'on interpose le miroir M_2; l'image B'_1B_1 se comporte comme un objet virtuel pour ce miroir et son image B'_2B_2 donnée par M_2 est réelle.

Cette image est symétrique de B'_1B_1 par rapport au plan du miroir M_2. Son centre A_2 est donc situé sur la perpendiculaire en O_2 à l'axe du miroir M_1 à une distance $O_1A_2 = 20$ cm.

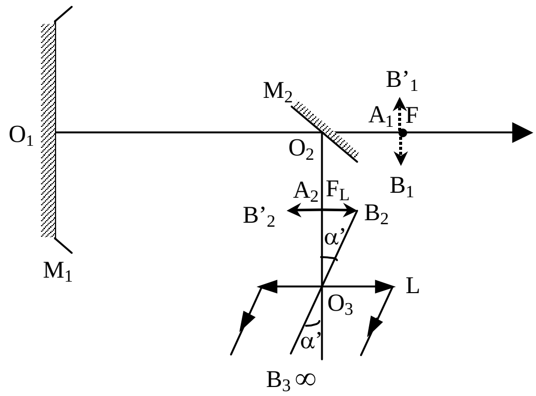
L'image B'_2B_2 a même dimension que B'_1B_1.

3. L'observateur vise à l'infini, l'image $B'_2\,A_2B_2$ est donc dans le plan focal objet de l'oculaire : $A_2 \equiv F_L$

3.a. La distance O_2O_3 est donc donnée par :

$$\overline{O_2O_3} = \overline{O_2F_L} + \overline{F_LO_3} = 24 \text{ cm}$$

3.b.



Le diamètre apparent de l'image définitive est

$$2\,\alpha' = 2\,\frac{A_2B_2}{O_3F_L} = 6\,.10^{-2} \text{ rad}$$

3.c. Le grossissement du télescope est :

$$g = \frac{\alpha'}{\alpha} = 200$$

EP.9.10. : Téléobjectif

Pour photographier un objet $\overrightarrow{AB}$ de 1 m de hauteur, placé à une distance d = 100 m, on utilise d'abord un objectif formé d'une lentille convergente L_1 de distance focale f'_1 égale à 18 cm.

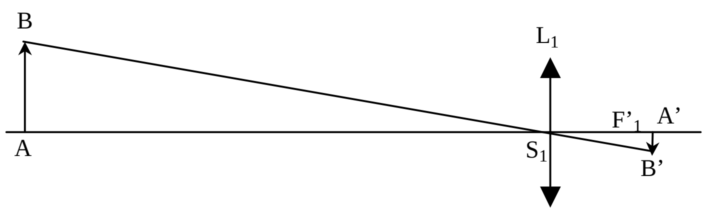
1- Déterminer la dimension de l'image.

2- Pour obtenir une image plus grande, on dispose derrière l'objectif, à 12 cm, une lentille divergente de distance focale f'_2 égale à 10 cm. Construire l'image finale. Déterminer sa position et sa grandeur.

3- Calculer la longueur de l'appareil photographique ainsi constitué ("téléobjectif"). La comparer à celle d'un appareil constitué par une simple lentille convergente qui donnerait la même image.

Solution

1- La distance de l'objet à la lentille étant très grande par rapport à la distance focale, l'image $\overrightarrow{A'B'}$ se forme dans le plan focal image de la lentille



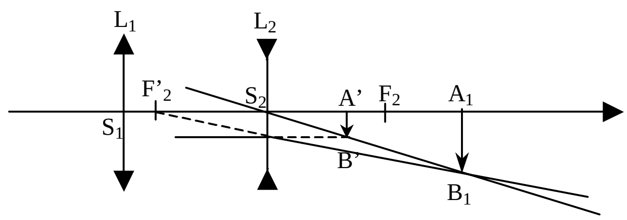
La similitude des triangles $S_1A'B'$ et S_1AB donne :

$$G_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{S_1A'}}{\overline{S_1A}} = \frac{\overline{S_1F'_1}}{\overline{S_1A}} = -\frac{18}{10\,000}$$

d'où $\overline{A'B'} = 100 \times -\frac{18}{10\,000} = -\frac{18}{100}$ cm $= -1{,}8$ mm

Cette image est donc renversée et très petite.

2- Construction de l'image



Pour la lentille L_2, l'objet $\overrightarrow{A'B'}$ est virtuel et l'image $\overrightarrow{A_1B_1}$ est réelle.

- Position de $\overrightarrow{A_1B_1}$

On a : $$\frac{1}{\overline{S_2A_1}} - \frac{1}{\overline{S_2A'}} = \frac{1}{\overline{S_2F'_2}}$$

avec : $\overline{S_2A'} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A'}$ = - 12 + 18 = 6 cm

et $\overline{S_2F'_2}$ = - 10 cm

d'où : $\overline{S_2A_1}$ = 15 cm

- Grandissement linéaire transversal :

$$G_2 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{S_2A_1}}{\overline{S_2A'}} = \frac{15}{6} = 2{,}5$$

soit : A_1B_1 = 4,5 mm

3- Longueur du téléobjectif :

S_1A_1 = 12 + 15 = 27 cm

Si l'appareil n'était constitué que par une seule lentille convergente, sa longueur devrait être de 45 cm puisque, d'après le calcul de la première question, la distance focale de cette lentille serait 2,5 fois plus grande que celle la lentille L_1 .

EP.9.11 : Photocopieur

Un photocopieur permet la reproduction d'un document original de surface S. Le système comporte, entre autres, un objectif constitué de plusieurs lentilles. L'image de l'original est recueillie sur un tambour photosensible.

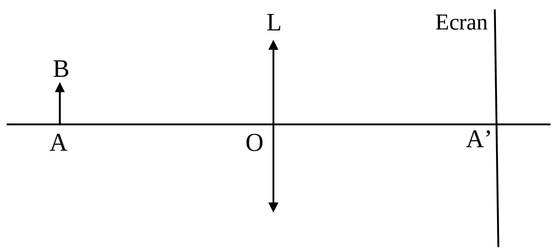
Si γ est le grandissement linéaire du système optique, la surface S' de la photocopie est :

S' = γ^2 S

Soit $\overrightarrow{AB}$ le document original

1. *Reproduction grandeur nature d'un document* :

L'objectif du système optique est assimilé, dans ce cas, à une lentille mince convergente L de centre optique O et de distance focale $\overline{OF'} = f'$



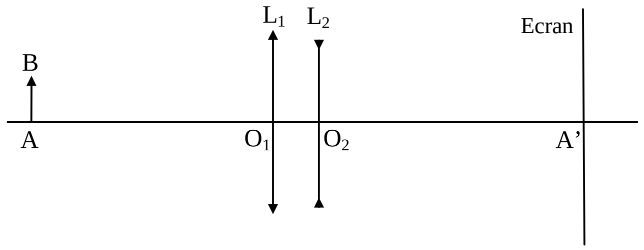
1.a. Quelle est la nature et le sens de l'image de $\overrightarrow{AB}$?

2.b. Montrer que le centre optique O de la lentille est au milieu du segment AA'

1.c. En déduire l'expression de la distance focale f ' de la lentille en fonction de $\overline{AA'}$.

2. ***Agrandissement d'un document*** **:**

Dans ce cas, l'objectif du système optique centré est modélisé par deux lentilles, l'une convergente L_1 de vergence C_1 , l'autre divergente L_2 de vergence C_2 .



Le centre optique O_1 de la lentille L_1 est placé à une distance d de A ; la lentille L_1 donne de $\overrightarrow{AB}$ une image $\overrightarrow{A_1B_1}$

La lentille L_2 est placée à droite de L_1 . Son centre optique O_2 est tel que $\overrightarrow{O_1O_2}$ = e. L_2 donne de $\overrightarrow{A_1B_1}$ l'image définitive $\overrightarrow{A'B'}$ sur l'écran.

2.a. Tracer la marche des rayons lumineux

2.b. Déterminer, graphiquement, le grandissement $\gamma_{1,2}$ de l'association (L_1, L_2)

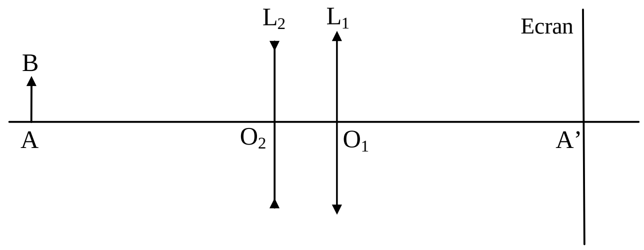
2.c. Vérifier que dans ce cas, la surface du document est sensiblement doublée.

On donne : C_1 = 5 dioptries, C_2 = - 3 dioptries

$\overline{AO_1} = \overrightarrow{O_2A'}$ = d = 60 cm $\overrightarrow{O_1O_2}$ = e = 8,6 cm

3. ***Réduction d'un document*** **:**

Dans ce cas, pour modéliser l'objectif, on permute les deux lentilles précédentes L_1 et L_2.



La lentille L_2 donne de $\overrightarrow{AB}$ l'image $\overrightarrow{A_2B_2}$. La lentille L_1 donne de $\overrightarrow{A_2B_2}$ l'image définitive $\overrightarrow{A'B'}$ sur l'écran.

3.a. Déterminer la position de l'image $\overrightarrow{A_2B_2}$

3.b. En déduire que le grandissement de la lentille L_2 est γ_2 = 0,36 et que le grandissement de la lentille L_1 est γ_1 = - 2

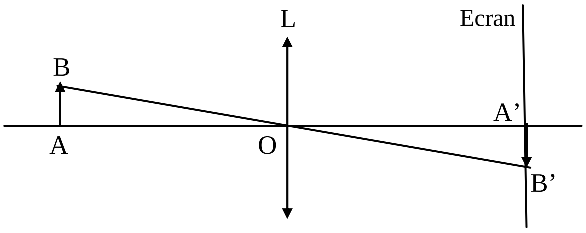
3.c. Déterminer le grandissement $\gamma_{2,1}$ de l'association (L_2, L_1)

3.d. En déduire que dans ce cas la surface du document est sensiblement divisée par deux.

On donne : $\overline{O_2A}$ = - 60 cm ; $\overline{O_1A'}$ = 60 cm ; $\overline{O_2O_1}$ = 8,6 cm

Solution

1. Reproduction grandeur nature :



1.a. L'image est réelle et renversée

1.b. On a γ = - 1 $\Rightarrow$ $\overline{OA} = -\overline{OA'}$ et O est bien le milieu du segment AA'.

1.c. On applique la relation de conjugaison avec origine au centre optique O :

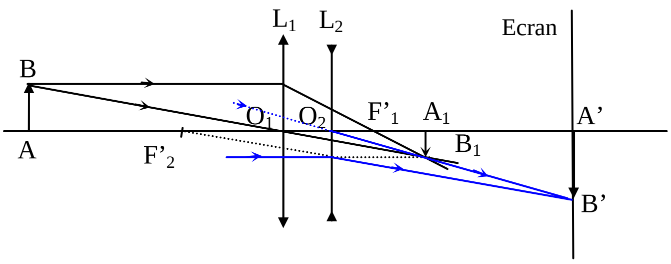
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

avec : $\overline{OA} = -\overline{OA'} = -\frac{\overline{AA'}}{2}$

soit : $\frac{4}{\overline{AA'}} = \frac{1}{f'}$ et $f' = \frac{\overline{AA'}}{4}$

2. Agrandissement :

2.a. Marche des rayons lumineux

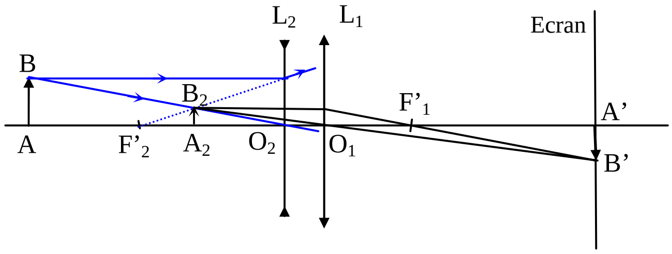


2.b. Graphiquement, on trouve : $\gamma_{1,2} \approx$ - 1,4

2.c. Surface du document :

on a : $\frac{S'}{S} = (\gamma_{1,2})^2 \approx (1,4)^2 \approx 2$

3. Réduction :
La marche des rayons lumineux est la suivante :



3.a. La relation de conjugaison avec origine au sommet O_2 de L_2 donne :

$$\frac{1}{\overline{O_2A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2A}} = \frac{1}{f'_2} \quad \Rightarrow \quad \overline{O_2A_2} = -21{,}6 \text{ cm}$$

3.b. On a :

$$\gamma_2 = \frac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_2A}} = \frac{-21{,}6}{-60} = 0{,}36$$

$$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1O_2} + \overline{O_2A}} = \frac{60}{-8{,}6 - 21{,}6} = -1{,}986 \approx -2$$

3.c. Grandissement de (L_2, L_1) :

$$\gamma_{2,1} = \gamma_2 \text{ x } \gamma_1 = -0{,}72$$

3.d. . Surface du document :

on a : $\frac{S'}{S} = (\gamma_{2,1})^2 = (-0{,}72) = 0{,}51 \approx \frac{1}{2}$

EP.9.12 : L'appareil photographique

Un appareil photographique est assimilable à une lentille convergente mince de distance focale f '=50 mm ; le nombre d'ouverture du diaphragme est égal à 4. On rappelle que le nombre d'ouverture du diaphragme qui est indiqué sur la bague de réglage de l'appareil photographique est le rapport f '/d de la distance focale de l'objectif au diamètre du diaphragme.

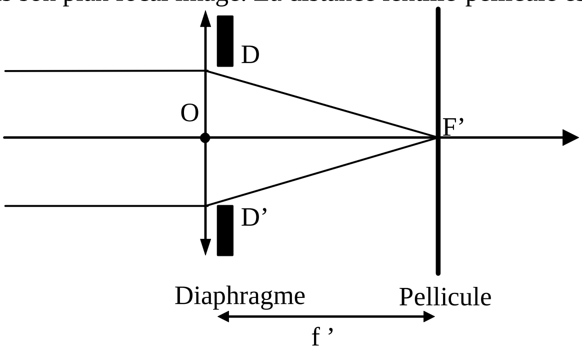
On met au point sur l'infini.

1. Quelle est alors la distance lentille - pellicule ?

2. Déterminer le domaine de l'espace qui est net sur le cliché si l'on admet qu'un point est vu nettement à condition que le diamètre de la tâche lumineuse qu'il forme sur la pellicule soit inférieur à δ = 30 μm.

Solution

1. Puisque l'appareil est au point sur l'infini, l'image du point à l'infini est sur la pellicule. Cette image étant le foyer principal image de la lentille F', la pellicule se trouve donc dans son plan focal image. La distance lentille-pellicule est donc f '.



2. L'image d'un point A sur l'axe est alors un point A' vérifiant la formule de conjugaison de la lentille:

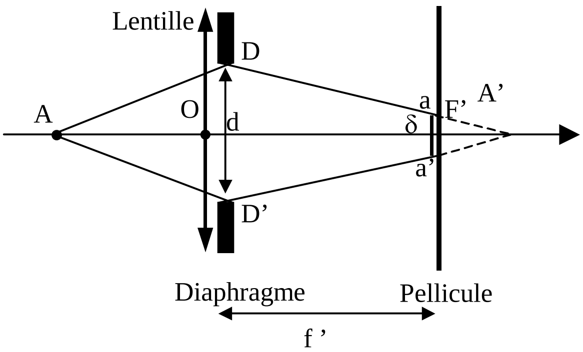
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \text{où} \quad \overline{OA} < 0 \quad \text{et} \quad \overline{OA'} > 0.$$

$\frac{1}{\overline{OA}} < \frac{1}{\overline{OF'}}$ et par suite $\overline{OA'} > \overline{OF'}$. L'image A' est située au delà de F'.

Le faisceau envoyé sur l'objectif fait donc apparaître sur la pellicule une tache aa' de diamètre δ.

En appliquant le théorème de Thalès, on obtient :

$$\frac{\overline{aa'}}{\overline{DD'}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{OA'}} \quad \text{ou} \quad \frac{\delta}{d} = \frac{\overline{OA'} - \overline{OF'}}{\overline{OA'}} = 1 - \frac{\overline{OF'}}{\overline{OA'}} \quad \text{avec } d = \overline{DD'}$$



Cherchons la position de A' lorsque $\delta = 30\ 10^{-6}$ m, sachant que

$$d = \frac{f'}{4} = 12{,}5 \text{ mm} \quad , \quad \overline{OA'} = \frac{f'}{1 - \frac{\delta}{d}} = 50{,}12 \text{ mm}$$

On en déduit $\overline{OA}$ à partir de la formule de conjugaison $\overline{OA} = -\ 20{,}83$ m.

Donc on verra nettement sur le cliché tous les points situés devant l'objectif entre l'infini et 20,83 m.

On peut remarquer que lorsque A s'approche de l'objectif, A' s'éloigne vers la droite et on vérifie que δ augmente.

CHAPITRE 10

NOTIONS D' OPTIQUE MATRICIELLE

Nous avons vu dans les chapitres précédents que les principes de l'optique géométrique et l'utilisation des lois de Snell- Descartes nous permettent de tracer la marche d'un rayon lumineux à travers un système optique et de construire l'image réelle ou virtuelle d'un objet dans l'approximation de Gauss. Lorsque le système optique considéré est simple et constitué d'un ou de deux dioptres (miroir, lame à faces parallèles,…….), la tâche est relativement aisée mais lorsqu'il est formé d'une série de dioptres ou d'une association de sous systèmes, la détermination du trajet du rayon lumineux issu d'un objet à travers un tel système s'avère extrêment complexe, voire impossible, sans l'utilisation de l'outil informatique. Dans ces cas il est intéressant d'utiliser l'approche matricielle qui consiste à associer à chaque élément du système une matrice dite matrice de transfert. Le système global sera alors caractérisé par une matrice de transfert égale au produit des matrices de chacun de ses éléments et donnant simplement les relations entre l'espace objet et l'espace image.

Cette approche qui ne se substitue nullement à l'étude et à l'utilisation des principes et lois de l'optique géométrique, est efficace d'un point de vue pratique pour sa rapidité dans la résolution de problèmes où on s'intéresse à la détermination de la position de l'image, de grossissement de l'objet et de la performance d'un appareil ou d'un instrument d'optique.

Dans cette démarche, le système, caractérisé par les matrices de transfert de ses éléments, est considéré comme une "boite noire" où on s'intéresse principalement à l'espace image et non à la marche des rayons lumineux à travers les dioptres. Cette démarche évite, en plus, lorsqu'elle est bien comprise, un gros effort de mémoire et un gain de temps dans la résolution de multiples problèmes.

1. Eléments de l'optique matricielle

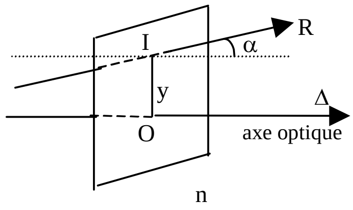
On rappelle que l'approximation de Gauss, qui est l'approximation linéaire de l'optique géométrique, consiste à ne considérer que les rayons faiblement inclinés par rapport à l'axe optique du système et donc de travailler uniquement avec de petits angles d'incidence, de réfraction et de réflexion.

En d'autres termes, la loi de la réfraction $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ s'écrit simplement :

$$n_1 i_1 \approx n_2 i_2$$

1.1. Coordonnées d'un rayon dans un espace d'indice n

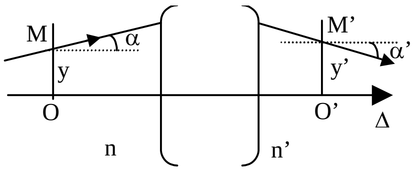
Un rayon lumineux se propageant dans un milieu isotrope d'indice n est complètement défini par les coordonnées du point I où le rayon traverse le plan de front et par les paramètres fixant la direction de ce rayon dans le milieu d'indice n.



Au rayon IR est associée la matrice colonne $\begin{bmatrix} y \\ n\alpha \end{bmatrix}$

1.2. Matrice de transfert (ou de passage)

Un rayon lumineux, passant de l'espace objet à l'espace image d'un système centré, rencontre en M et M' deux plans de front P_O et $P_{O'}$ coupant l'axe optique en O et O'.



Les coordonnées $\begin{bmatrix} y \\ n\alpha \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} y' \\ n'\alpha' \end{bmatrix}$ des rayons incident et émergent sont liées par des relations linéaires que l'on peut écrire sous forme matricielle :

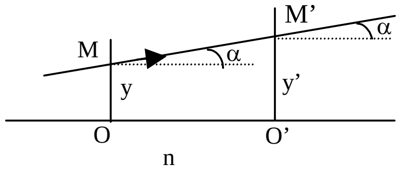
$$\begin{bmatrix} y' \\ n'\alpha' \end{bmatrix} = M_{\overline{OO'}} \begin{bmatrix} y \\ n\alpha \end{bmatrix}$$

$M_{\overline{OO'}}$ est la matrice de transfert. de O à O'

2. Principales matrices de transfert

2.1. Matrice de translation

C'est la matrice de transfert entre deux plans de front P_O et Po' situés dans un même milieu homogène et isotrope.



En posant $\overline{OO'} = x$, on a les relations

$$y' = y + \alpha x$$
$$n\alpha' = n\alpha$$

soit :

$$\mathbf{T_{\overline{OO'}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{\frac{x}{n}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \text{ = \textbf{matrice de translation}}$$

et :

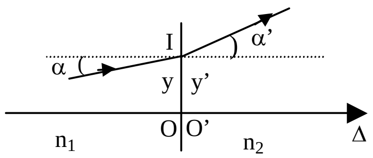
$$\begin{bmatrix} y' \\ n\alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ n\alpha \end{bmatrix}$$

Le déterminant de la matrice de translation est égal à 1.

2.2. Matrice de réfraction

2.2.1. Cas du dioptre plan

Le dioptre plan sépare deux milieux d'indices n_1 et n_2. Soit I le point d'incidence.



Les plans P_O et Po' sont confondus avec le dioptre plan. On a :

$$y' = y$$
$$n_2\,\alpha' = n_1\,\alpha$$

Ces relations se traduisent sous forme matricielles par :

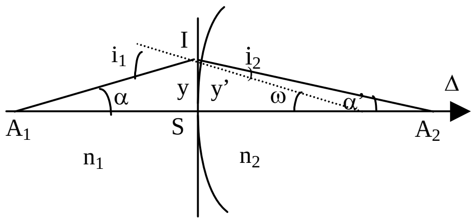
$$\begin{bmatrix} y' \\ n_2\,\alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ n_1\,\alpha \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{R}_{\overline{oo'}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ **est la matrice de réfraction d'un dioptre plan.**

Son déterminant est égal à 1.

2.2.2. Cas du dioptre sphérique

Les plans P_O et Po' sont les plans tangents au sommet S du dioptre sphérique, de rayon $\overline{SC} = R$, séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2.. Les points O et O' sont confondus avec S.



On a : $\quad y' = y \qquad (1)$

$$i_1 = \alpha - \omega$$
$$i_2 = \alpha' - \omega$$
$$n_1\, i_1 = n_2\, i_2$$

et $\quad \omega = -\dfrac{y}{R}$

soit : $\quad n_1\,(\alpha - \omega) = n_2\,(\alpha' - \omega)$

d'où : $\quad n_2\,\alpha' = -\dfrac{n_2 - n_1}{R}\,y + n_1\,\alpha \qquad (2)$

Les relations (1) et (2) peuvent être remplacées par une seule relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} y' \\ n_2\,\alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ n_1\,\alpha \end{bmatrix}$$

La **matrice de réfraction d'un dioptre sphérique** est :

$$\mathbf{R}_{\overline{OO'}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\dfrac{\mathbf{n_2 - n_1}}{\mathbf{R}} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Qu'on note aussi : $\mathbf{R}_{\overline{OO'}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-C} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$

où **C est la vergence du dioptre sphérique:** $\mathbf{C} = \dfrac{\mathbf{n_2 - n_1}}{\mathbf{R}}$.

Le déterminant de la matrice de transfert est encore égal à 1.

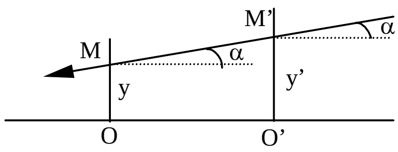
Remarque : la matrice de réfraction du dioptre plan se déduit de celle du dioptre sphérique en écrivant que le rayon R du dioptre plan est infini et, par suite, que sa vergence est nulle, soit C = 0.

2.3. Matrice de réflexion

Il suffit de considérer que l'indice de l'espace image, dans lequel la lumière se propage en sens inverse de l'axe optique, est négatif : n' = -n.

Les coordonnées des rayons incident et réfléchi sont alors :

$$\begin{bmatrix} y \\ n\alpha \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} y' \\ -n\alpha' \end{bmatrix}$$



Ainsi :

- *la matrice de translation* dans l'espace image s'écrit :

$$T_{\overline{OO'}} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{x}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et on a : $\begin{bmatrix} y' \\ -n\alpha \end{bmatrix} = T_{\overline{OO'}} \begin{bmatrix} y \\ n\alpha \end{bmatrix}$

- *la matrice de réflexion sur un miroir sphérique* est :

$$\mathbf{M}_{\overline{OO'}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-C} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

où C est la vergence du miroir sphérique : $C = -\dfrac{\mathbf{2n}}{\mathbf{R}}$

La vergence d'un miroir sphérique se déduit de celle d'un dioptre sphérique en posant : $n_2 = -n_1 = -n$

- *la matrice de réflexion sur un miroir plan* s'obtient en remarquant que le rayon de courbure R d'un miroir plan est infini et par suite C = 0 :

$$\mathbf{M}_{\overline{OO'}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

On remarque que ***le déterminant des matrices de réflexion est encore égal à 1.***

3. Expression générale d'une matrice de transfert d'un système centré

3.1. Généralisation

Un système centré est constitué d'une suite de surfaces séparées par des espaces homogènes et isotropes d'indices n_1, n_2, ……, n_k .

Si l'on représente par $\lfloor M_1 \rfloor$, $\lfloor M_2 \rfloor$, …….., $\lfloor M_k \rfloor$ la matrice de transfert de chacun des éléments (aussi bien les intervalles entre les surfaces que les surfaces elles-mêmes) et par $\begin{bmatrix} y_k \\ n_k\alpha_k \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} y_1 \\ n_1\alpha_1 \end{bmatrix}$ les coordonnées d'un rayon dans l'espace image et dans l'espace objet du système centré, il vient :

$$\begin{bmatrix} y_k \\ n_k\alpha_k \end{bmatrix} = \lfloor M_k \rfloor \lfloor M_{k-1} \rfloor \ldots\ldots \lfloor M_1 \rfloor \begin{bmatrix} y_1 \\ n_1\alpha_1 \end{bmatrix}$$

La matrice de transfert globale est le produit des matrices de transfert (de translation et de passage par les surfaces) de tous les éléments. **Ce produit est effectué dans le sens de propagation de la lumière**.

La matrice de transfert de l'espace objet à l'espace image la plus générale s'écrit alors : $$M_{\overline{OO'}} = \begin{bmatrix} a & b \\ -C & d \end{bmatrix}$$

Son déterminant est égal à 1 comme toutes les matrices de transfert dont elle est le produit.

C représente la vergence du système centré.

<u>**Rappel**</u> : le produit de deux matrices de 2 lignes et 2 colonnes s'écrit :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}$$

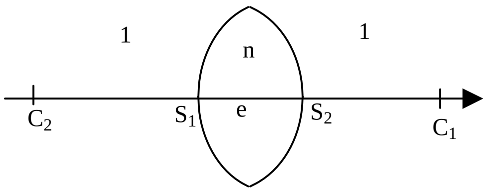
Si b = d = 0 (matrice colonne), alors :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc \\ Ca + Dc \end{bmatrix}$$

3.2. Applications

3.2.1. Matrice de transfert d'une lentille épaisse biconvexe

La lentille, d'indice n et d'épaisseur $e = \overline{S_1S_2}$, est plongée dans l'air.



Le premier dioptre sphérique air-verre a un rayon $\overline{S_1C_1} = R_1$, le deuxième dioptre sphérique verre-air a un rayon $\overline{S_2C_2} = R_2$

La matrice de transfert de la lentille est :

$$M_{\overline{S_1S_2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C_1 & 1 \end{bmatrix}$$

où : $C_1 = \frac{n-1}{R_1}$ est la vergence du premier dioptre sphérique

$C_2 = \frac{1-n}{R_2}$ est la vergence du deuxième dioptre sphérique

On a alors :

$$M_{\overline{S_1S_2}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{e}{n}C_1 & \frac{e}{n} \\ -(C_1 + C_2 - \frac{e}{n}C_1C_2) & 1 - \frac{e}{n}C_2 \end{bmatrix}$$

Qu'on peut encore écrire :

$$M_{\overline{S_1S_2}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{e}{n}C_1 & \frac{e}{n} \\ -C & 1 - \frac{e}{n}C_1 \end{bmatrix}$$

où C est la vergence d'une lentille épaisse biconvexe placée dans l'air.

On a : $C = C1 + C2 - \frac{e}{n}C_1C_2 = \frac{n-1}{R_1} + \frac{1-n}{R_2} - \frac{e}{n}\frac{n-1}{R_1}\frac{1-n}{R_2}$

Soit :

$$\mathbf{C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n-1}{n}\frac{e}{R_1R_2}\right)}$$

3.2.2. Matrice de transfert d'une lentille mince

Par définition, une lentille mince est une lentille dont l'épaisseur e est négligeable devant R_1, R_2 et ($R_1 - R_2$).

La vergence d'une lentille mince placée dans l'air s'écrit donc :

$$C = C_1 + C_2 = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

C est la somme des vergences des deux dioptres.

La matrice de transfert d'une lentille mince s'écrit simplement :

$$\mathbf{M_{\overline{SS}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-C} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

4. Changements d'origine

Rappelons que si $\begin{bmatrix} y' \\ n'\alpha' \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} y \\ n\alpha \end{bmatrix}$ sont les coordonnées des rayons dans l'espace image d'indice n' et dans l'espace objet d'indice n, et $\begin{bmatrix} a & b \\ -C & d \end{bmatrix}$ est la matrice de transfert du système centré, on a :

$$\begin{bmatrix} y' \\ n'\alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -C & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ n\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ay + bn\alpha \\ -Cy + dn\alpha \end{bmatrix}$$

soit :

$$y' = ay + bn\alpha$$
$$n'\alpha' = -Cy + dn\alpha$$

4.1. Origine en deux points conjugués

Dire que les points origines O et O' sont conjugués, c'est dire que tous les rayons incidents passant par O émergent du système en passant par O' ou encore que y' est indépendant de α. Cette propriété entraîne que **b = 0** et $y' = a\,y$ soit $a = \frac{y'}{y}$. Le terme a représente donc le grandissement linéaire transversal du γ système **: a =** γ .

La relation $n'\alpha' = -Cy + d\,n\alpha$ appliquée à un point O sur l'axe (y = 0) se réduit à $n'\alpha' = d\,n\alpha$, soit $d = \frac{n'\alpha'}{n\alpha}$ où $\frac{\alpha'}{\alpha} = G$ représente le grandissement angulaire du système. En remplaçant $\frac{n}{n'}$ par γG (formule de Lagrange-Helmhotz) on obtient $\mathbf{d} = \frac{1}{\gamma}$ **.**

La matrice de transfert $M_{\overline{OO'}}$ s'écrit alors :

$$\mathbf{M}_{\overline{\mathbf{OO'}}} = \begin{bmatrix} \gamma & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \gamma^{-1} \end{bmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est bien égal à 1.

4.2. Origines aux foyers objet F et image F'

4.2.1. Origine au foyer objet F

Tout rayon passant par le foyer objet F (y = 0), pris comme origine, émerge du système parallèlement à l'axe ($\alpha' = 0$). Pour ces rayons, la relation $n'\alpha' = -Cy + d\,n\alpha$ se réduit à $0 = 0 + d\,n\alpha$ quel que soit α, ce qui impose que **d = 0**.

4.2.2. Origine au foyer image F’

Un rayon incident parallèle à l’axe ($\alpha = 0$) émerge du système en passant par F’ (y’ = 0). La relation y’ = ay + bnα se réduit dans ce cas à 0 = ay quel que soit y, ce qui entraîne que **a = 0**.

4.2.3. Origines en F et F’

La matrice de transfert réunit les conditions précédentes (a = d = 0) et s’écrit :

$$M_{\overline{FF'}} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice devant être égal à 1, ce qui se traduit par $\mathbf{b = C^{-1}}$, on a :

$$\mathbf{M_{\overline{FF'}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C^{-1}} \\ \mathbf{-C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

4.3. Origines aux points principaux. Distances focales

Les points principaux H et H’ sont des points conjugués pour lesquels le grandissement transversal γ dans les plans de front passant ces points est égal à 1.

H et H’ étant des points conjugués et γ = 1**,** on a

$$M_{\overline{HH'}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-C} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Les distances focales image f’ et objet f sont, par définition, données par :

$$f' = \overline{H'F'} \qquad \text{et} \qquad f = \overline{HF}$$

Cherchons les coordonnées de H et H’ en prenant les foyers F et F’ comme origines. La matrice de transfert s’écrit :

$$M_{\overline{HH'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{x'}{n'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{matrice de translation de F' à H'}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matrice de transfert de F' à F}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{x}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{matrice de translation de H à F}} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}$$

où $x' = \overline{F'H'} = -f'$ et $x = \overline{FH} = -f$

On obtient en effectuant le produit des matrices :

$$1 = - C \frac{x'}{n'} \quad \text{et} \quad 1 = + C \frac{x}{n}$$

soit : $$C = \frac{n'}{f'} = - \frac{n}{f}$$

ou encore $$f' = \frac{C}{n'} \quad \text{et} \quad f = - \frac{C}{n}$$

Exemples :

- pour une **lentille mince** plongée dans l'air (n = n' = 1), les points H et H' sont confondus avec le sommet S de la lentille et l'on a :

$$C = \frac{1}{f'} = - \frac{1}{f} == \frac{1}{\overline{\overline{SF'}}} = - \frac{1}{\overline{\overline{SF}}}$$

ou encore : $$\overline{\mathbf{SF'}} = - \overline{\mathbf{SF}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{C}}$$

- pour un **dioptre sphérique** de rayon R = $\overline{SC}$:

$$C = \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{f'} = - \frac{n_1}{f}$$

$$\overline{\mathbf{SF'}} = \frac{\mathbf{n_2}}{\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{n_2}}{\mathbf{n_2 - n_1}} \overline{\mathbf{SC}}$$

$$\overline{\mathbf{SF}} = - \frac{\mathbf{n_1}}{\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{n_1}}{\mathbf{n_1 - n_2}} \overline{\mathbf{SC}}$$

La matrice de transfert avec origines aux foyers prend la forme simple :

$$\mathbf{M}_{\overline{FF'}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{n_1}} \\ -\frac{\mathbf{n_2}}{\mathbf{f'}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

4.4. Origines au sommet S d'un système centré mince

Tout rayon passant par le sommet S émerge du système en passant par S, soit y' = y pour tout α , donc **b = 0 et a = 1**.

On a donc : $$M_{\overline{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C & d \end{bmatrix}$$

Le déterminant de $M_{S,S}$ doit être égal à 1, ce qui entraîne que **d = 1**
d'où :

$$\mathbf{M}_{\overline{SS}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-C} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

5. Relations de conjugaison

5.1. Méthode de calcul

Si pour un système centré on a calculé une matrice de transfert quelconque de deux points O et O' : $M_{\overline{OO'}} = \begin{bmatrix} a & b \\ -C & d \end{bmatrix}$, on obtient la relation de conjugaison de deux points A et A' en écrivant que :

$$M_{\overline{AA'}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x'}{n'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -C & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{x}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ -C & \gamma^{-1} \end{bmatrix}$$

matrice de translation de O' à A' — matrice de transfert de O' à O — matrice de translation de A à O — matrice de transfert des deux points conjugués A et A'

où $x' = \overline{O'A'}$ et $x = \overline{OA}$

Par identification et après avoir effectué le produit des matrices, on obtient :

$$\gamma = a - C\,\frac{x'}{n'} \quad \text{et} \quad \gamma^{-1} = d + C\,\frac{x}{n}$$

ou encore :

$$\mathbf{x' = \frac{n'}{C}(a - \gamma) \quad et \quad x = -\frac{n}{C}(d - \gamma^{-1})}$$

5.2. Relation de conjugaison avec origine aux foyers (formule de Newton)

On écrit :

$$M_{\overline{AA'}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x'}{n'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{x}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ -C & \gamma^{-1} \end{bmatrix}$$

avec $x' = \overline{F'A'}$ et $x = \overline{FA}$

On obtient en effectuant le produit des matrices :

$$\gamma = -C\,\frac{x'}{n'} \qquad \text{et} \qquad \gamma^{-1} = C\,\frac{x}{n}$$

soit : $$-C\,\frac{\overline{F'A'}}{n'} = \frac{1}{C}\,\frac{n}{\overline{FA}}$$

ou encore : $$\overline{FA}\,.\,\overline{F'A'} = -\,\frac{n}{C}\,\frac{n'}{C}$$

Exemples :

a/- Lentille mince de sommet S plongée dans l'air (n = n' = 1)

On a $$C = \frac{1}{f'} = -\,\frac{1}{f} = -\,\frac{1}{\overline{F'S}} = \frac{1}{\overline{FS}}$$

Ce qui entraîne : $$\overline{FA}\,.\,\overline{F'A'} = \overline{FS}\,.\,\overline{F'S}$$

b/- Dioptre sphérique, de sommet S et de rayon R

On a $n' = n_2$, $n = n_1$ et $$C = \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{f'} = -\,\frac{n_1}{f}$$

Soit $$\mathbf{\overline{FA}\,.\,\overline{F'A'} = -\,\frac{n_2}{C}\,\frac{n_1}{C} = f'f}$$

ou encore : $$\mathbf{\overline{FA}\,.\,\overline{F'A'} = \overline{FS}\,.\,\overline{F'S}}$$

5.3. Relation de conjugaison avec origine au sommet S d'un système centré mince

On écrit :

$$M_{\overline{AA'}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x'}{n'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{x}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ -C & \gamma^{-1} \end{bmatrix}$$

où : $x = \overline{SA}$ et $x' = \overline{SA'}$

On obtient en effectuant le produit des matrices :

$$\gamma = 1 - \frac{x'}{n'}\,C \qquad \text{et} \qquad \gamma^{-1} = 1 + \frac{x}{n}\,C$$

d'où : $$\gamma\,\gamma^{-1} = 1 = \left(1 - \frac{x'}{n'}\,C\right)\left(1 + \frac{x}{n}\,C\right)$$

$$1 = 1 - \frac{x'}{n'}\,C + \frac{x}{n}\,C - \frac{xx'}{nn'}\,C^2$$

soit : $$C = \frac{n'}{x'} - \frac{n}{x}$$

Exemples :

a/- <u>Lentille mince plongée dans l'air</u> : n = n' = 1

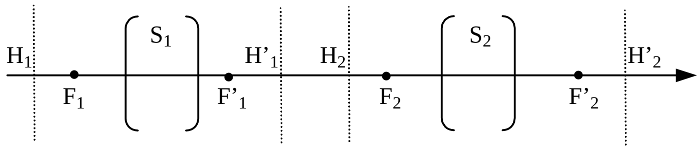
$$C = \frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{\overline{SF'}}$$

b/- <u>Dioptre sphérique de rayon R</u> = $\overline{SC}$: n = n_1 et n' = n_2

$$C = \frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$$

6. Association de deux systèmes centrés

On considère deux systèmes centrés de vergence C_1 et C_2 dont les points principaux sont H_1, H'_1 et H_2, H'_2 et les foyers sont F_1, F'_1 et F_2, F'_2. Les deux systèmes sont plongés dans l'air.



On pose $\overline{H'_1H_2} = d$ et $\overline{F'_1F_2} = a$, où a et d sont les paramètres qui caractérisent la séparation entre les deux systèmes.

La matrice de transfert des deux points H'_2 et H_1 s'écrit :

$$M_{\overline{H_1H'_2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C_2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{passage de } H_2 \text{ à } H'_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{passage de } H'_1 \text{ à } H_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C_1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{passage de } H_1 \text{ à } H'_1} = \begin{bmatrix} 1 - dC_1 & d \\ -C_1 - C_2 + dC_1C_2 & 1 - dC_2 \end{bmatrix}$$

La vergence C du système total est alors en fonction de d :

$$C = C_1 + C_2 - d\, C_1C_2$$

La matrice de transfert des deux points F'_2 et F_1 s'écrit :

$$M_{\overline{F_1F'_2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & C_2^{-1} \\ -C_2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{passage de } F_2 \text{ à } F'_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{passage de } F'_1 \text{ à } F_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & C_1^{-1} \\ -C_1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{passage de } F_1 \text{ à } F'_1} = \begin{bmatrix} -\frac{C_1}{C_2} & 0 \\ aC_1C_2 & -\frac{C_2}{C_1} \end{bmatrix}$$

La vergence C du système peut donc s'écrire encore en fonction de a :

$$C = - aC_1C_2$$

<u>Exemple</u> : <u>cas de deux lentilles</u> :

Les deux systèmes centrés sont deux lentilles minces placées dans l'air et séparées par une distance d.

Les points principaux H_1, H'_1 et H_2, H'_2 sont dans ce cas confondus respectivement avec les sommets S_1 et S_2 des lentilles.

Dans le cas particulier où **les deux lentilles sont accolées** (d = 0) la matrice du système s'écrit :

$$M_{\overline{S_1S_2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(C_1 + C_2) & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}$$

Le système est équivalent à une lentille mince de vergence :

$$C = C_1 + C_2 = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$$

où f' est la distance focale de la lentille équivalente.

Dans le **cas général**, la vergence du système formé par les deux lentilles est :

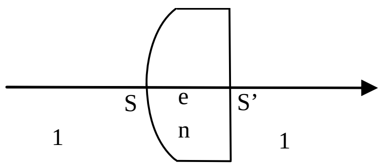
$$\mathbf{C = C_1 + C_2 - d\, C_1C_2 = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{d}{f'_1 f'_2} = \frac{1}{f'}}$$

où f ' est la distance focale du système.

Exercices et problèmes

EP.10.1. : Matrice de transfert d'une lentille convexe-plan épaisse

Une lentille de verre convexe-plan, d'épaisseur e et d'indice n, est placée dans l'air. La première face est sphérique de rayon $\overline{SC} = R$



Déterminer la matrice de transfert de cette lentille ainsi que sa vergence.

Solution

La lumière incidente est réfractée par la première face sphérique de rayon $\overline{SC} = R$, puis elle est transmise dans le verre et, enfin, sort après une deuxième réfraction par le dioptre plan.

Les indices de l'espace image et de l'espace objet sont égaux à 1.

Considérons le rayon qui se propage suivant l'axe optique et notons :

$R_{1,n}$ la matrice de réfraction du dioptre sphérique air-verre

T_n la matrice de translation dans le verre

$R_{n,1}$ la matrice de réfraction du dioptre plan verre-air

La matrice de transfert de la lentille est :

$$M_{\overline{SS'}} = R_{n,1}\, T_n\, R_{1,n}$$

Soit :
$$M_{\overline{SS'}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

avec :
$$R_{1,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{n,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit :
$$M_{\overline{SS'}} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{e}{n}\dfrac{n-1}{R} & \dfrac{e}{n} \\ -\dfrac{n-1}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

que l'on peut encore écrire :

$$M_{\overline{SS'}} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{e}{n}C & \dfrac{e}{n} \\ -C & 1 \end{bmatrix}$$

où C est la vergence de la lentille épaisse convexe- plan :

$$C = \frac{n-1}{R}$$

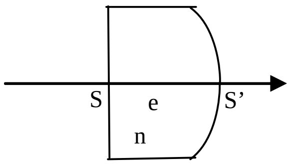
Cette vergence est la même que celle d'un dioptre sphérique air-verre. Ce résultat est prévisible puisque la vergence d'une lentille bi-convexe épaisse est :

$$C = C_1 + C_2 + eC_1C_2$$

où C_1 et C_2 sont les vergences des deux dioptres sphériques dont l'un, dans notre cas, est plan et a donc une vergence nulle..

EP.10.2. : Matrice de transfert d'une lentille plan-convexe épaisse

Une lentille de verre plan-concave, d'épaisseur e et d'indice n, est placée dans l'air. La première face est plane et la deuxième est sphérique de rayon $\overline{S'C}$ = R



Déterminer la matrice de transfert de cette lentille ainsi que sa vergence.

Solution

La lumière incidente est réfractée par la première face plane, puis elle est transmise dans le verre et, enfin, sort après une deuxième réfraction sur la face sphérique de rayon $\overline{S'C}$ = R

Les indices de l'espace image et de l'espace objet sont égaux à 1.

Les matrices de transfert des divers éléments composant la lentille sont identiques à celles de l'exercice EP.10.1. mais l'ordre où elles apparaissent dans la matrice de transfert globale est différent :

$$M_{\overline{SS'}} = R_{n,1}\, T_n\, R_{1,n}$$

Soit : $$M_{\overline{SS'}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n-1}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec : $$R_{1,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{n,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n-1}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$M_{\overline{SS'}} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{e}{n} \\ -\dfrac{n-1}{R} & 1-\dfrac{e}{n}\dfrac{n-1}{R} \end{bmatrix}$$

Que l'on peut encore écrire :

$$M_{\overline{SS'}} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{e}{n} \\ -C & 1-\dfrac{e}{n}C \end{bmatrix}$$

où C est la vergence de la lentille plan-convexe :

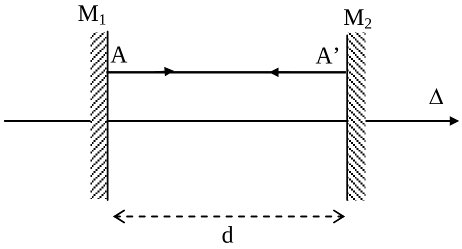
$$C = \frac{n-1}{R}$$

On remarque que la vergence obtenue est identique à celle de la lentille épaisse convexe-plan de l'exercice EP.10.1. Ce résultat est prévisible en vertu du principe du retour inverse de la lumière.

EP.10.3. : Cavité formée par deux miroirs plans

On considère deux miroirs plans M_1 et M_2, parallèles entre eux, placés dans l'air à une distance d l'un de l'autre et dont les faces réfléchissantes sont en regard.

Un rayon lumineux, parallèle à l'axe Δ et issu d'un point A du miroir M_1 subit des réflexions multiples sur M_2 et M_1.



Déterminer la matrice de transfert de la cavité lors d'un cycle de réflexions au bout duquel le rayon retrouve sa direction initiale.

Solution

Au cours du cycle, le rayon issu de A subit une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ (d), une réflexion en A' sur le miroir M_2, une translation de vecteur $\overrightarrow{A'A}$ (- d) puis une réflexion en A sur le miroir M_1.

La matrice de transfert de la cavité au cours de ce cycle s'écrit :

$$M_{\overline{AA}} = R_A \, . \, T_{\overline{A'A}} \, . \, R_{A'} \, . \, T_{\overline{AA'}}$$

Avec :

$$T_{\overline{AA'}} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{A'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{\overline{A'A}} = \begin{bmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En effectuant le produit des matrices, on obtient :

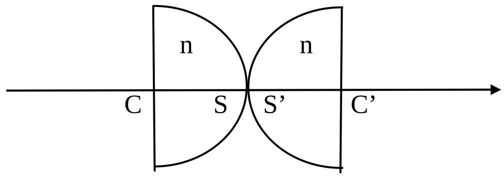
$$M_{\overline{AA}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le rayon se retrouve bien identique à lui-même.

EP.10.4. : Système formé par deux lentilles demi boules

Déterminer la vergence ainsi que la position des foyers et des points principaux d'un système de deux lentilles de verre demi boule CS et C'S' , de même rayon R, d'indice n = 1,5, placées dans l'air et accolées par leurs sommets S et S':

Que peut-on dire des positions trouvées ?



Solution

La matrice de transfert du système s'écrit :

$$M_{\overline{CC'}} = T_{\overline{S'C'}} \cdot R_{\overline{SS'}} \cdot T_{\overline{CS}}$$

avec :

$$T_{\overline{CS}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{R}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\overline{SS'}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2\frac{n-1}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{\overline{S'C'}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{R}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient en effectuant le produit des matrices :

$$M_{\overline{CC'}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{n}-1 & . \\ -2\frac{n-1}{R} & \frac{2}{n}-1 \end{bmatrix}$$

La vergence du système est :

$$C = 2\frac{n-1}{R}$$

Les coordonnées $x' = \overline{C'A'}$ et $x = \overline{CA}$ de deux points conjugués A et A', sachant que le système a un grandissement linéaire transversal γ et que l'indice des deux milieux extrêmes est 1, est, d'après les relations trouvées au § 5.1. :

$$x' = \frac{1}{C}(a - \gamma) = \frac{R}{2(n-1)}\left(\frac{2}{n}-1-\gamma\right)$$

$$x = -\frac{1}{C}(d - \gamma^{-1}) = -\frac{R}{2(n-1)}\left(\frac{2}{n}-1-\gamma^{-1}\right)$$

En particulier :

- pour les foyers :

foyer F' : on a $\gamma = 0$ soit $\overline{C'F'} = R\frac{2-n}{2n(n-1)} = \frac{R}{3}$

foyer F : on a $\gamma^{-1} = 0$ soit $\overline{CF} = -R\dfrac{2-n}{2n(n-1)} = -\overline{C'F'}$

On a également : $\overline{SF} = \overline{SC} + \overline{CF} = -\overline{SF'}$

- pour les points principaux : on $\gamma = 1$, soit :

$$\overline{C'H'} = -\overline{CH} = -\frac{R}{n} = -\frac{2}{3}R$$

On a de même : $\overline{SH} = -\ \overline{SH'}$

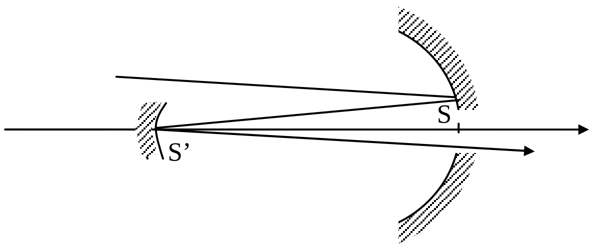
Les foyers et les points principaux sont symétriques par rapport à S qui est le centre optique du système. Cette propriété était prévisible puisque le système est symétrique par rapport à S.

EP.10.5. : Système de deux miroirs sphériques

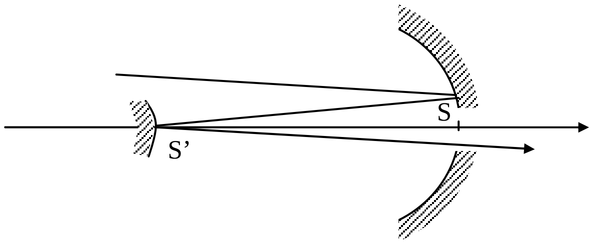
Déterminer la vergence ainsi que la position des foyers et des points principaux des deux systèmes suivants :

1. Système de deux miroirs concaves, l'un de sommet S, de rayon R (R < 0), percé d'un petit trou à son sommet, l'autre de sommet S' et de rayon R' (R' > 0), distants de $\overline{SS'}$ = d (d <0).

Que peut-on dire de ce système lorsque R = - R' = d ?



2. Système de deux miroirs : le premier est concave de sommet S, de rayon R (R < 0), percé d'un petit trou à son sommet, le second est convexe de sommet S'et de rayon R' = R, distants de $\overline{SS'}$ = d = R.



Solution

1. La matrice de transfert de ce système s'écrit :

$$M_{\overline{SS'}} = Re_{S'} \cdot T_{\overline{SS'}} \cdot Re_S$$

avec : $Re_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$ matrice de réflexion sur le miroir S

$T_{\overline{SS'}} = \begin{bmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrice de translation de S à S'

$Re_{S'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R'} & 1 \end{bmatrix}$ matrice de réflexion sur le miroir S'

ce qui donne :

$$M_{\overline{SS'}} = \begin{bmatrix} 1-\frac{2d}{R} & . \\ \frac{2}{R}-\frac{2}{R'}+\frac{4d}{RR'} & 1+\frac{2d}{R'} \end{bmatrix}$$

La vergence du système est :

$$C = \frac{2(R-R'-2d)}{RR'}$$

Les abscisses de deux points conjugués sont données par les relations du § 5.1 :

$$x' = \frac{1}{C}(a - \gamma) = \frac{R'(R-2d-\gamma R)}{2(R-R'-2d)}$$

$$x = -\frac{1}{C}(d - \gamma^{-1}) = -\frac{R(R'+2d-\gamma^{-1}R')}{2(R-R'-2d)}$$

On obtient :

- foyers

foyer F' : on a $\gamma = 0$ soit $\overline{S'F'} = \frac{R'(R-2d)}{2(R-R'-2d)}$

foyer F : on a $\gamma^{-1} = 0$ soit $\overline{SF} = -\frac{R(R'+2d)}{2(R-R'-2d)}$

- points principaux : $\gamma = 1$

$$\overline{S'H'} = -\frac{2R'd}{2(R-R'-2d)}$$

$$\overline{SH} = -\frac{2Rd}{2(R-R'-2d)}$$

Dans le cas où R = - R' = d, les foyers F et F' sont rejetés à l'infini : le système est donc afocal.

2. Le calcul est identique à celui de la question 1.
En écrivant que R = R' = d, on obtient :

$$\overline{S'F'} = \frac{d}{4}$$

$$\overline{SF} = 3\frac{d}{4}$$

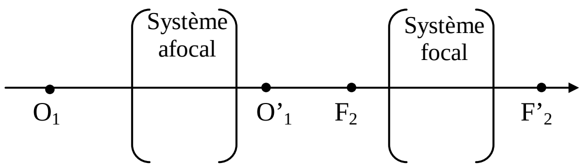
$$\overline{S'H'} = \frac{d}{2}$$

$$\overline{SH} = \frac{d}{2}$$

EP.10.6. : Association d'un système afocal et d'un système focal

On considère l'association de deux systèmes centrés. Le premier est afocal de grandissement γ, le second est focal de vergence C. L'ensemble est placé dans l'air.

Soit O_1, O'_1 un couple de points conjugués par rapport au premier système et F_2, F'_2 les foyers du second. On pose $\overline{O'_1F_2} = a$



Déterminer :

1. la matrice de transfert des deux points F'_2 et O_1,

2. la vergence du système obtenu

3. la distance $\overline{O_1F}$ où F est le foyer objet du système associé

Solution

1. La matrice de transfert des points O_1et F'_2 est :

$$M_{\overline{O_1F'_2}} = M_{\overline{F_2F'_2}} \cdot T_{\overline{O'_1F_2}} \cdot M_{\overline{O_1O'_1}}$$

avec :

$$M_{\overline{O_1O'_1}} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{bmatrix}$$ matrice de transfert de O_1 à O'_1

$$T_{\overline{O'_1F_2}} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrice de translation de O'$_1$ à F_2

$$M_{\overline{F_2F'_2}} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$ matrice de transfert de F_2 à F'$_2$

soit :

$$M_{\overline{O_1F'_2}} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1}\gamma^{-1} \\ -\gamma C & -aC\gamma^{-1} \end{bmatrix}$$

2. La vergence du système associé est égale à : γ C . Elle est indépendante de a.

3. Les coordonnées x' = $\overline{F'_2A'}$ et x = $\overline{O_1A}$ de deux points conjugués A et A', les milieux extrêmes ayant l'indice 1, sont d'après les relations du § 5.1 :

$$x' = \frac{1}{C'}(a-\gamma) = \frac{1}{\gamma C}(0-\gamma)$$

$$x = -\frac{1}{C'}(d-\gamma^{-1})$$

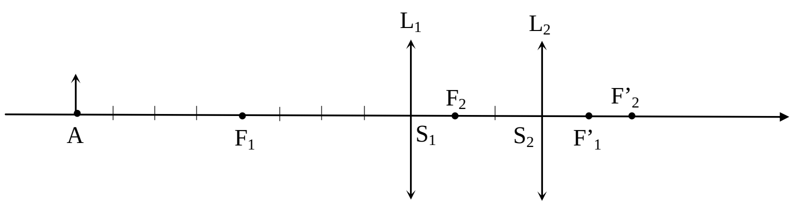
Pour les foyers F et F' du système associé, on a :

- foyer F' ($\gamma = 0$) : $\overline{F'_2F'} = 0$
- foyer F ($\gamma^{-1} = 0$) : $\overline{O_1F} = -\frac{1}{\gamma C}\left(-aC\gamma^{-1}\right) = a\,\gamma^{-2}$

EP.10.7. : Etude d'un oculaire

Un oculaire est constitué de deux lentilles minces convergentes L_1 et L_2, respectivement de sommets S_1 et S_2, de distances focales f_1 et f_2, séparées d'une distance $\overline{S_1S_2}$ = e.

Un objet A est placé sur l'axe à une distance d en avant de L_1.



1. Ecrire la matrice de transfert $M_{\overline{F_1F'_2}}$

2. Déterminer la position de l'image A' de A ainsi que le grandissement linéaire transversal γ de cet oculaire.

On donne : f_1 = 4 cm f_2 = 2 cm   e = 3 cmd = 8 cm

Solution

Notons $\Delta = \overline{F'_1 F_2}$ l'intervalle optique. On a :

$$\Delta = \overline{F'_1 F_2} = \overline{F'_1 S_1} + \overline{S_1 S_2} + \overline{S_2 F_2} = -f_1 + e - f_2$$

1. La matrice de transfert $M_{\overline{F_1 F'_2}}$ s'écrit :

$$M_{\overline{F_1 F'_2}} = R_{\overline{F'_1 F'_2}} \cdot T_{\overline{F'_1 F_2}} \cdot R_{\overline{F_2 F'_2}}$$

avec :

$$R_{\overline{F_2 F'_2}} = \begin{bmatrix} 0 & C_1^{-1} \\ -C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{\overline{F'_1 F_2}} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\overline{F'_1 F'_2}} = \begin{bmatrix} 0 & C_2^{-1} \\ -C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

soit :

$$M_{\overline{F_1 F'_2}} = \begin{bmatrix} 0 & C_2^{-1} \\ -C_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & C_1^{-1} \\ -C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

On trouve :

$$M_{\overline{F_1 F'_2}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{C_1}{C_2} & 0 \\ \Delta C_1 C_2 & -\dfrac{C_2}{C_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 \\ -\dfrac{3}{8} & -2 \end{bmatrix}$$

En appliquant les relations trouvées au § 5.1

$$x' = \frac{1}{C}(a - \gamma) = \overline{F'_2 A'}$$

$$x = -\frac{1}{C}\left(d - \gamma^{-1}\right) = \overline{F_1 A}$$

on obtient : $x = -\dfrac{8}{3}\left(-2 - \gamma^{-1}\right) = -4 \quad \Rightarrow \quad \gamma^{-1} = -\dfrac{7}{2}$ et $\gamma = -\dfrac{2}{7}$

d'où : $x' = \overline{F'_2 A'} = \dfrac{8}{3}\left(-\dfrac{1}{2} - \gamma\right) = -\dfrac{4}{7}$ cm

on encore : $\overline{S_2 A'} = \overline{S_2 F'_2} + \overline{F'_2 A'} = f_2 + x' = 2 - \dfrac{4}{7} = \dfrac{10}{7}$ cm.

Index

Bibliographie

1- **M. Bertin, J-P Faroux et J. Renault**,
Otique ,
Editions Dunod, 1988.

2- **J. Berty, A. Escaut, P. Marchand, L. Martin, A. Oustry,**
Physique pratique, Tome 3 : Optique,
Editions Vuibert Université, 1986.

3- **J. Boutigny**,
Optique,
Editions Vuibert, 1986.

4- **J-M Brébec, P. Denève,T. Desmarais, M. Ménétrier, B. Noel, C. Orsini**,
Optique exercices et problèmes corrigés,
Editions Hachette, 1999.

5- **J-M Brébec, P. Denève,T. Desmarais, M. Ménétrier, B. Noel, C. Orsi**ni,
Optique 1ère année,
Editions Hachette, 1999.

6- **G. Bruat**,
Cours de Physique Générale, Optique
6ème Edition revue et corrigée par A. Kastler
Editions Masson,1965.

7- **L. Dettwiller**,
Optique ,
Editions Dunod, 1992.

8- **L. Dettwiller**,
Qu'est-ce que l'optique géométrique ? ,
Editions Dunod. ; 1990.

9- **L. Dettwiller**,
Les instruments d'optique, étude théorique, expérimentale et pratique,
Editions Ellipses , 1997.

10- **E. Elbaz et F. Roux**,
Optique matricielle,
Editions ellipses, 1989.

11- **R. Journeaux,**
Travaux pratiques de Physique, Electricité, Electronique, Optique,
Editions De Boeck Univrsité, 1998.

12- **J.P. Lecardonnel et P. Tilloy**,
Optique, exercices et problèmes résolus,
Editions Bréal, 1984

13- **J. Ph Perez**,
Optique géométrique, ondulatoire et polarisation ,
Editions Masson, 1991

14- **J-P. et P. Provost**,
O*ptique*,
Cedic/ Fernand Nathan, 1980

15- **J. Renault**,
Exercices d'optique et de physique ondulatoire ,
Editions Dunod, 1986

16- **P. Roux,**
Manuel de Physique, Optique,
Editions Ellipses, 1994

17- **J-P. Sarmant**,
Dictionnaire de Physique,
Editions Hachette, 1981.

18- **R. Suardet,**
Optique,
J.B. Baillière et fils, Editeurs